

Федеральное бюджетное учреждение
«Научно-технический центр по ядерной
и радиационной безопасности»

Модели и задачи механики деформируемых сред

А. И. Глушко, И. И. Нещеретов

Москва 2022

УДК 539.3
ББК 22.3
Г 55

Глушко А. И., Нещеретов И. И. Модели и задачи механики деформируемых сред: Сборник статей. Труды ФБУ «НТЦ ЯРБ».
– М.: ФБУ «НТЦ ЯРБ», 2022. – 304 с.

Книга представляет собой сборник избранных статей авторов по механике деформируемых сред, опубликованных в научных рецензируемых и реферируемых журналах за последние четыре десятилетия.

Предметом книги являются модели поведения различных деформируемых сред, конкретные задачи и алгоритмы их решения.

В книге излагаются новые результаты, которые до соответствующих публикаций отсутствовали в других источниках.

К их числу принадлежат:

– решение задачи о дифракции поперечной волны, где был обнаружен эффект движения возмущений, опережающих движение падающей волны;

– решение задачи о дифракции продольной волны на цилиндрической полости при больших временах;

– метод численной реализации соотношений на бихарактеристиках для трех пространственных переменных;

– численный метод решения смешанных задач для гиперболических систем уравнений с четырьмя независимыми переменными на нерегулярной сетке;

– оригинальный подход к построению моделей многофазных упругих пористых сред;

– построение моделей неупругих сред с учетом накопления повреждений с определяющим параметром повреждаемости тензором второго ранга;

– построение моделей упругих сред, нормальные компоненты вектора напряжений которых ограничены.

От читателя требуется владение стандартными курсами анализа и линейной алгебры. Все необходимые сведения по механике твердого деформируемого тела приводятся в книге.

© Глушко А. И., Нещеретов И. И., 2022
© ФБУ «НТЦ ЯРБ», 2022

ISBN 978-5-907011-42-7

Содержание

Предисловие	4
Глава 1. Распространение волн напряжений в неоднородной вязкопластической среде	8
Глава 2. Соударение цилиндрических пластинс учетом накопления микропор	22
Глава 3. Дифракция нестационарной поперечной волны на цилиндрической полости	39
Глава 4. Дифракция продольной волны на цилиндрической полости при больших временах	50
Глава 5. Численное решение гиперболических систем уравнений на нерегулярной сетке	64
Глава 6. Метод решения квазистатических задач для упрочняющихся тел	84
Глава 7. О кинетическом подходе к разрушению горных пород	99
Глава 8. Континуальные модели разрушения твердых тел при нестационарных нагрузках	111
Глава 9. Построение моделей многофазных упругих пористых сред.....	147
Глава 10. Модель упрочняющихся средс тензорным параметром повреждаемости.....	189
Глава 11. Модель упругих разномодульных сред, учитывающая повреждаемость.....	220
Глава 12. Модель анизотропных упругопластических сред с тензорным параметром повреждаемости	240
Глава 13. Модель упругой среды с ограничениями нормальных компонент вектора напряжений.....	278
Послесловие	301

Предисловие

*Все должно быть изложено так просто,
как только возможно, но не проще.*

Альберт Эйнштейн

Книга представляет собой сборник наших избранных статей по механике деформируемых сред, написанных и опубликованных в научных журналах за последние четыре десятилетия. Так как к научной статье обычно предъявляется требование ее независимости и в ней обычно приводятся все необходимые понятия и определения, то некоторые места в книге дублируют друг друга. Но в этом есть и положительная сторона – главы можно читать независимо одну от другой.

Предметом книги являются модели поведения различных деформируемых сред, конкретные задачи и алгоритмы их решения. Первоначально внимание авторов было сосредоточено на задачах, связанных с их служебной деятельностью. Затем оно сместилось в сторону рассмотрения моделей поведения вкупе с имеющимися экспериментальными фактами и физическими представлениями.

Обратимся к содержанию книги. В первой главе рассматривается численное решение задачи о распространении одномерных волн напряжений в неоднородной вязкопластической среде с нелинейными характеристиками. Применительно к песчаным грунтам приводятся результаты сопоставления теоретических расчетов по затуханию волн напряжений в вязкопластической и пластической средах с соответствующими экспериментальными данными.

Во второй главе решается задача соударения двух цилиндрических пластин конечной толщины. Для исследования откольных явлений в металлах (медь, алюминий, свинец) используется система уравнений, описывающая движения сплошной среды с учетом накопления микропор.

В этой системе процесс накопления микропор моделируется кинетическим уравнением, в котором учитывается зарождение микропор и их дальнейший рост под действием растягивающих напряжений.

В третьей главе решается задача о дифракции нестационарной поперечной плоской волны на цилиндрической полости, свободной от напряжений и находящейся в безграничной упругой среде. Решение задачи строится на неравномерной сетке с использованием схемы пространственный крест внутри расчетной области и соотношений на бихарактеристиках – на ее границах.

В четвертой главе рассматривается задача дифракции плоской нестационарной продольной волны на цилиндрической полости,

расположенной в упругой безграничной среде и свободной от напряжений. Исследуется поведение решения при временах, более чем на порядок превышающих характерное время задачи – время пробега продольной волны по радиусу полости. Показано, что ошибки решения, построенного с помощью предлагаемого в работе метода, использующего во внутренних точках расчетной области схемы Мак-Кормака второго порядка точности и схемы «предиктор – корректор» для соотношений на бихарактеристиках в граничных точках, в два и более раз меньше ошибки решения этой же задачи, использующего в качестве маршевой схемы «крест», распада произвольного разрыва и Лакса.

В пятой главе построен алгоритм численного решения смешанных задач для гиперболических систем уравнений, возникающих в теории упругости и вязкоупругости,

в случае четырех независимых переменных. В частности, приведена используемая при построении решения в граничных точках реализация метода бихарактеристик для случая трех пространственных переменных.

В шестой главе рассматривается вариационная формулировка эволюционных задач, моделирующих квазистатические процессы деформирования упрочняющихся упругопластических тел, при описании которых, как известно, можно пренебречь инерционными членами в уравнениях движения. В частности, показано, что процедура коррекции напряжений сводится к решению нелинейного уравнения методом последовательных приближений с числом приближений, отличным от единицы.

В седьмой главе в рамках представлений механики сплошной среды построена модель поведения горных пород, учитывающая процесс накопления микроповреждений. Отличительной особенностью модели является обратное влияние процесса накопления микроповреждений на механические характеристики среды, в том числе на ее эффективные модули.

В восьмой главе приведен обзор работ по построению континуальных моделей разрушения твердых тел при нестационарных интенсивных нагрузках. Основное внимание уделяется анализу моделей, описывающих откольные явления в металлах, а также процессы деформирования и разрушения горных пород.

В девятой главе построена модель поведения многофазных упругих сред при любом числе жидких фаз в отсутствие фазовых переходов и химических реакций. Исходным положением при построении модели служит определение средних величин с помощью постулируемых интегральных соотношений, справедливость которых принимается в качестве гипотезы.

В десятой главе построена модель упрочняющихся упругопластических сред, при деформировании которых наблюдается эффект Баушингера и происходит необратимое накопление дефектов. Накопление повреждений

описывается симметричным положительно определенным тензором второго ранга, который включен в число определяющих параметров.

В одиннадцатой главе рассматривается нелинейная упругая среда, причем в состоянии, когда тензор повреждаемости равен нулю, свободная энергия представляется в виде однородной функции второй степени, дважды дифференцируемой при любых отличных от нуля значениях тензора деформаций. Это означает, что рассмотренная в работе среда принадлежит к типу разномодульных сред.

В двенадцатой главе предложен один из способов аппроксимации определяющих соотношений, использующихся для описания поведения упрочняющихся упругопластических сред с учетом накопления повреждений и исходной анизотропии (трансверсально-изотропное тело) материала. Показано, что полная система уравнений с частными производными принадлежит к гиперболическому типу, а ее решения не противоречат второму началу термодинамики.

В конце прошлого века возник подход к решению задач об оценке напряженно-деформируемого состояния материалов конструкций из каменной или кирпичной кладки исторических зданий и сооружений, основанный на рассмотрении поведения некой осредненной среды вместо рассмотрения поведения отдельно кирпичей и раствора. Определяющее соотношение математической модели такой осредненной среды является предметом исследования тринадцатой главы, где показано, что среда, обладающая свойством ограниченности нормальных напряжений, является гиперупругой, а определяющее соотношение модели среды представляет собой нелинейную зависимость между тензорами Пиолы – Киркгофа и Грина – Сен – Венана.

В книге собраны статьи, где излагаются факты или новые представления, которые до соответствующих публикаций вряд ли можно было найти в других источниках.

К их числу принадлежит задача о дифракции поперечной волны, где был обнаружен эффект движения возмущений, опережающих исходное движение падающей волны. К их числу можно отнести также и метод численной реализации соотношений на бихарактеристиках для трех пространственных переменных, и построение модели неупругой среды с учетом накопления повреждений, в которой в качестве определяющего параметра используется симметричный положительно определенный тензор второго ранга.

К читателю предъявляется требование владения стандартными курсами анализа и линейной алгебры; для всего выходящего за эти пределы в тексте приведены определения и даны соответствующие ссылки. Все необходимые сведения по механике твердого деформируемого тела

приводятся в книге. Еще раз подчеркнем, что книга не является учебником по механике сплошной среды.

При подготовке книги к печати исправлены все обнаруженные опечатки. К каждой главе написаны комментарии, в которых приводятся сведения о публикации работ. Встречающиеся в тексте числа в квадратных скобках представляют собой ссылки на литературу, помещенную

в конце каждой из глав. Встречающиеся в комментариях числа в фигурных скобках представляют собой ссылки на литературу, помещенную в конце комментария.

Отдельные результаты обсуждались со многими коллегами, в том числе с С. С. Григоряном, В. Ф. Журавлевым, Н. А. Есениной, С. М. Капустянским, А. Н. Ковшовым и Л. М. Флитманом, советы и обстоятельные замечания которых способствовали уменьшению числа недостатков книги.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить руководство Научно-технического центра по ядерной и радиационной безопасности за предоставленную возможность публикации.

Авторы

Глава 1. Распространение волн напряжений в неоднородной вязкопластической среде

Рассматривается численное решение задачи о распространении одномерных волн напряжений в неоднородной вязкопластической среде с нелинейными характеристиками. Определяющее уравнение для среды при одноосном сжатии принималось в виде, аналогичном предложениям [1, 2].

Количественные данные о механических характеристиках среды принимались применительно к грунтам на основе результатов экспериментальных исследований [3, 4].

Расчеты по распространению волн напряжений в вязкопластической среде применительно к грунтам в случае линейных предельных диаграмм и линейной вязкости были проведены методом характеристик в [5]. Аналогичные расчеты при несколько иных предположениях о модели среды (но также для случая однородной среды, линейных диаграмм и линейной вязкости) были позднее проведены в [6]. Ниже, используя метод сквозного счета и численную схему типа «крест» [7], рассматривается влияние неоднородности для среды типа грунта и нелинейности его характеристик на распространение и затухание в нем волн напряжений.

Применительно к песчаным грунтам [3, 4] приводятся результаты сопоставления теоретических расчетов по затуханию волн напряжений в вязкопластической и пластической средах с соответствующими экспериментальными данными.

1. О модели среды. Предполагается, как ранее в [3, 5], что сдвиг в грунте в первом приближении не зависит от скорости деформирования, а условие пластичности имеет вид условия Мизеса-Шлейхера [8]. Таким образом, при сделанных предположениях скорость деформирования влияет только на объемное сжатие.

Для решения поставленной задачи достаточно двух соотношений – закона деформирования при объемном сжатии и условия пластичности, из которых можно получить закон деформирования при одноосном сжатии.

Для неоднородной среды закон деформирования принимаем в виде, являющемся некоторой модификацией [1, 2]:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + G(z), \quad E = \begin{cases} E_1(h, \varepsilon) & \partial \sigma / \partial t \geq 0 \\ E_*(h, \sigma, \varepsilon) & \partial \sigma / \partial t < 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь h – координата Лагранжа (глубина), t – время, σ – наибольшее главное напряжение, ε – деформация, $G(z)$ – нелинейная функция аргу-

мента $z = \sigma - f(h, \varepsilon): G > 0$ при $z > 0$ и $G = 0$ при $z \leq 0$.

При $E_* = E_1 = \text{const}$ (1.1) совпадает с предложениями [9, 10]. При $\partial\varepsilon/\partial t \rightarrow \infty$ и $\partial\varepsilon/\partial t \rightarrow 0$ из (1.1) имеем, как и в [5], предельные диаграммы сжатия (динамическую и статическую) при нагружении

$$\sigma = \int_0^\varepsilon E_1(h, \xi) d\xi \equiv \varphi(h, \varepsilon), \quad \partial\varepsilon/\partial t \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

$$\sigma = f(h, \varepsilon), \quad \partial\varepsilon/\partial t \rightarrow 0 \quad (1.3)$$

В дальнейшем при проведении вычислений механические характеристики среды принимаются в следующем виде

$$\begin{aligned} \varphi(h, \varepsilon) &= E_1^0(h)(\varepsilon + m_1\varepsilon^{\nu_1}), & E_1^0(h) &= E_0(1 + k_1h)^{2n_1} \\ f(h, \varepsilon) &= K(h)(\varepsilon + m_2\varepsilon^{\nu_2}), & K(h) &= K_0(1 + k_2h)^{2n_2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$G = \eta_0 [\sigma - f(h, \varepsilon)]^\kappa, \quad E_* = \begin{cases} E_1^*, & 0 \leq \sigma \leq \sigma_1 \\ E_2^*, & \sigma > \sigma_1 \end{cases}$$

Здесь $[S] = S$, если $S > 0$, $[S] \equiv 0$, если $S \leq 0$, $E_1^0(h), K(h)$ – переменные по глубине модули деформаций для предельных диаграмм сжатия, характеризующие неоднородность среды, η_0 – коэффициент вязкости, имеющий размерность $(\text{см}^2/\text{кг})/\text{сек}$. При расчетах, производившихся применительно к песчаному грунту, значения коэффициентов соответствуют [3, 4]: $E_0 = 1000 \text{ кг}/\text{см}^2$, $m_1 = 840$, $\nu_1 = 3,4$, $K_0 = 250 \text{ кг}/\text{см}^2$, $m_2 = 38,0$, $\nu_2 = 2,0$, $\sigma_1 = 15 \text{ кг}/\text{см}^2$, $E_2^* = 11000 \text{ кг}/\text{м}^2$, $E_1^* = 1700 \text{ кг}/\text{см}^2$.

2. Численная схема и алгоритм вычислений. Система уравнений для решения рассматриваемой задачи в безразмерном виде в координатах Лагранжа следующая:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(\sigma + q)}{\partial h} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial h} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \eta_0 [\sigma - f(h, \varepsilon)]^\kappa, \quad q = a \left(\left[-\frac{\partial v}{\partial h} \right] \right)^b (1 - \varepsilon)$$

Начальные и граничные условия имеют вид

$$\sigma(h, 0) = v(h, 0) = 0, \quad \sigma(0, t) = \sigma_0 ([1 - t])^n \quad (2.2)$$

Здесь и далее, если это особо не оговаривается, все величины нормированы таким образом, что плотность ρ_0 , скорость слабых возмущений

$a_0 = (E_0/\rho_0)^{1/2}$ и время действия нагрузки τ равняются единице, q – искусственная вязкость Неймана-Рихтмайера [11], a – величина, характеризующая линейный размер, на котором «размазывается» фронт волны, $b=1$ соответствует линейной вязкости, $b=2$ – квадратичной вязкости.

Конечно-разностный аналог системы уравнений (2.1), (2.2) при использовании схемы типа «крест» [7] имеет вид

$$\left(v_{j+1/2}^i - v_{j+1/2}^{i-1}\right)/d + \left(\sigma_j^{i-1/2} - \sigma_{j+1}^{i-1/2}\right)/\Delta h + q_j^i = 0 \quad (2.3)$$

$$\left(\varepsilon_j^{i+1/2} - \varepsilon_j^{i-1/2}\right)/d + \left(v_{j+1/2}^{i-1} - v_{j-1/2}^{i-1}\right)/\Delta h = 0, \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_j^{i+1/2} - \varepsilon_j^{i-1/2} = \left(\sigma_j^{i+1/2} - \sigma_j^{i-1/2}\right)/E_j^{i-1/2} \left(\varepsilon_j^{i-1/2}\right) + d\eta_0 \left(\left[\sigma_j^{i-1/2} - f\left(\varepsilon_j^{i-1/2}\right)\right]\right)^k \quad (2.5)$$

$$q_j^i = a \left\{ \frac{\left(\left[v_{j+1/2}^{i-1} - v_{j+3/2}^{i-1}\right]\right)^b}{1 - \left(\varepsilon_j^{i-1/2} + \varepsilon_{j+1}^{i-1/2}\right)/2} - \frac{\left(\left[v_{j-1/2}^{i-1} - v_{j+1/2}^{i-1}\right]\right)^b}{1 - \left(\varepsilon_j^{i-1/2} + \varepsilon_{j-1}^{i-1/2}\right)/2} \right\} \quad (2.6)$$

$$\sigma_1^{i+1/2} = \sigma_0 \left(\left[1 - (i+1/2)d\right]\right)^n \quad (2.7)$$

$$v_{L+1/2}^i = \sigma_L^{i-1/2} \quad (2.8)$$

где L – количество слоев, $\Delta h = 1/L$, j – номер слоя по глубине, i – номер узла сетки по времени, d – шаг счета.

Величина d определяется из модифицированного условия Куранта [7]:

$$d = h_1 / \left[L \left(E_{j_1}^{i-1/2} \right)^{1/2} \right] \quad (2.9)$$

где h_1 – некоторый коэффициент, с помощью которого регулируется сходимость численного решения, j_1 – номер слоя, соответствующего максимальному значению деформации для данного момента времени $t = (i-1/2)d$.

Алгоритм работает следующим образом. Из уравнения движения (2.3) в узлах с полуцелыми номерами по h и целыми по t вычисляется скорость $v_{j+1/2}^i$. Искусственная вязкость (2.6) вводится для слоев от $j=1$ до $j=L-1$. Затем из уравнения неразрывности (2.4) в узлах с целыми номерами по h и полуцелыми по t вычисляются деформация $\varepsilon_j^{i+1/2}$ и далее из (2.5) – напряжение $\sigma_j^{i+1/2}$. При этом на нулевом слое напряжения определяются из граничного условия (2.7), а деформации не определены. На последнем слое скорость определяется из (2.8). Уравнение (2.9) соответствует условию излучения плоской волны в бесконечную упругую среду. Таким

образом, имеем двухслойную явную схему второго порядка точности. Эта схема была реализована в виде программы на языке Алгол-60.

3. Численное исследование решения. Предварительные расчеты показали, что наиболее оптимальным в условии (2.9) для нелинейных предельных динамических диаграмм является коэффициент $h_1 = 0.2-0.25$. При этом меньшее значение соответствует меньшей вязкости. Для линейных диаграмм величина h_1 может достигать 0.5. В указанных случаях увеличение количества слоев L в два раза не приводит к сколько-нибудь заметным изменениям в результатах расчетов. Это свидетельствует о том, что решение обладает необходимой сходимостью.

При проведении расчетов во всех случаях вводилась искусственная квадратичная вязкость, причем принималось $a = 25$.

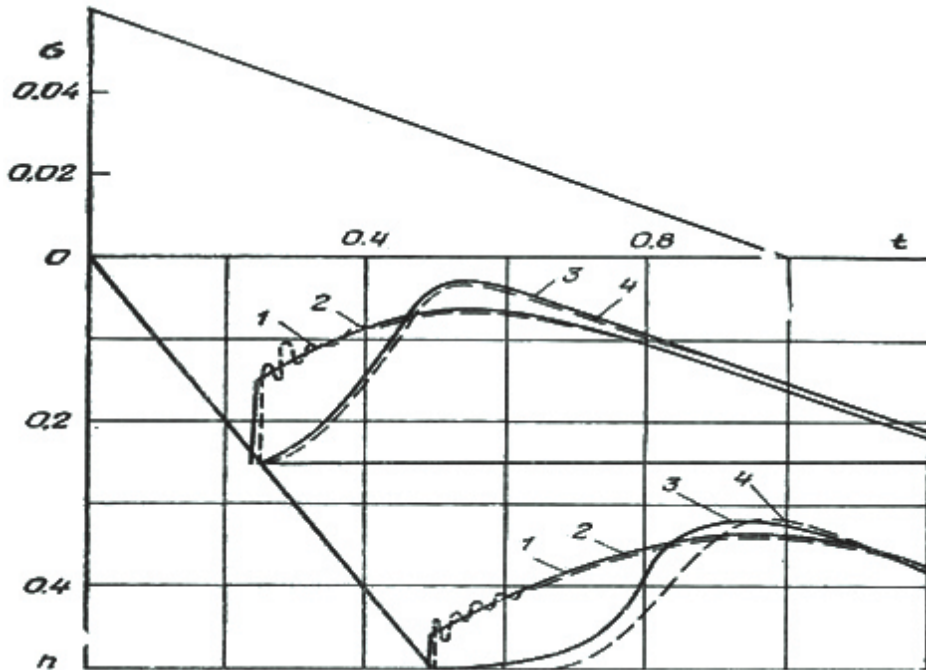
При разгрузке среды ($\partial\sigma/\partial t < 0$) для нелинейных предельных динамических диаграмм, а также в неоднородной среде дополнительно вводилась линейная вязкость, которая позволила существенно уменьшить интенсивность высокочастотных составляющих, что особенно важно при малой естественной вязкости η . При этом величина a в основных вариантах расчетов при $\kappa < 1, n = 10 \div 11$ и $\eta = 0.4 \div 1.0$ принималась следующим образом

$$a = \begin{cases} 50, & \sigma/\sigma_0 \leq 0.1, \\ 5, & \sigma/\sigma_0 > 0.1 \end{cases} \quad (3.1)$$

Факт существенной неустойчивости численного счета для упруго-пластической среды при переходе на стадию разгрузки отмечался ранее в [12]. При наличии естественной вязкости введение дополнительной линейной искусственной вязкости согласно (3.1) позволило получить достаточно устойчивое решение. При $\eta = 0$, как и в [12], наблюдалось существенное увеличение «раскачки» при $\partial\sigma/\partial t < 0$.

При малых $\eta < 0.4 \div 1.0$ величина a увеличивалась в два раза. При линейной нагрузке ($n = 1$) величина a уменьшалась в пять раз. Следует отметить также, что рассматриваемая численная схема при $\kappa < 1$ становится неустойчивой при больших значениях $\eta \sim 10^2$. При этих условиях конечно-разностная система уравнений (2.3)-(2.6) плохо аппроксимирует исходную систему уравнений, потому что вторая производная $\partial^2\varepsilon/\partial t^2$ имеет корневую особенность при $\sigma = f(h, \varepsilon)$.

Было произведено сопоставление результатов расчетов для задачи с параметрами $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon$, $f(\varepsilon) = K_0\varepsilon$, $G = \eta(\sigma - K_0\varepsilon)$, $E_* = E_1 = \text{const}$ с результатами расчетов этой же задачи методом характеристик в [5]. На фиг. 1 в плоскости h, t для глубин $h = 0.25$ и $h = 0.5$ приведены кривые изменения во времени напряжений $\sigma(h, t)$, полученные методом характеристик (сплошные линии) и методом сквозного счета (пунктир). В расчетах были приняты следующие исходные данные: $K_0 = 0.3, n = 1$; $\eta = 10$ (кривые 1, 2), $\eta = 100$ (кривые 3, 4).



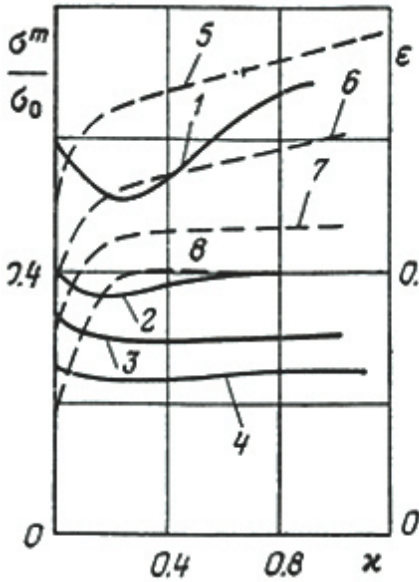
Фиг. 1

Сопоставление показывает, что при малых вязкостях $\eta \leq 10$ результаты расчетов по обоим методам достаточно хорошо совпадают как по амплитудам, так и по временным характеристикам. При больших вязкостях с глубин $h > 0.5$ наблюдается некоторое расхождение результатов, полученных методом сквозного счета (кривая 4) и методом характеристик

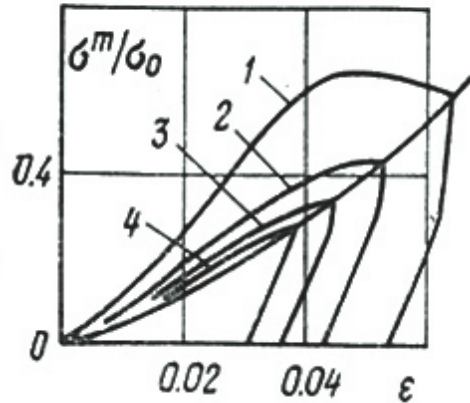
(кривая 3), по величинам времени нарастания напряжений до максимального значения (до 10 %). Максимальные напряжения при этом совпадают с достаточной точностью (до 1–3 %). Таким образом, можно полагать, что принятый метод дает вполне удовлетворительную точность при расчетах, по крайней мере для глубин $h \leq 0.5$.

4. Результаты расчетов. Рассмотрим, как влияют параметры η, κ на затухание волн напряжений в среде с определяющим уравнением (1.1).

На фиг. 2 представлены максимальные напряжения σ^m (кривые 1–4) и деформации ε^m (кривые 5–8) в зависимости от κ при размерной вязкости $\eta_0 = 0.5 \text{ (см}^2/\text{кг)}^\kappa / \text{сек}$, $\sigma_0 = 0.06$ и $n = 10$ на глубинах $h = 0.062$ (кривые 1, 5), $h = 0.125$ (кривые 2, 6), $h = 0.181$ (кривые 3, 7) и $h = 0.250$ (кривые 4, 8).



Фиг. 2



Фиг. 3

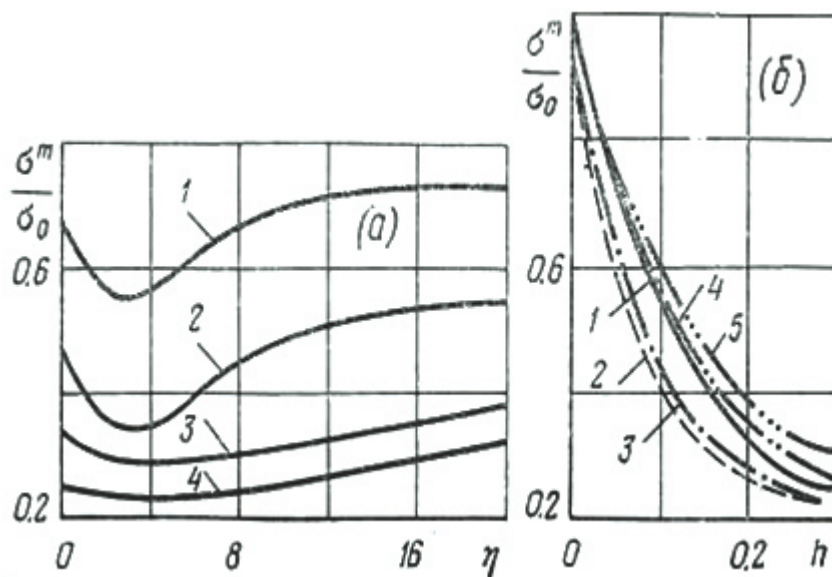
Видно, что величина κ существенно влияет на максимальные напряжения и деформации, особенно на малых глубинах ($h \leq 0.062 \div 0.125$). При $h > 0.125$ это влияние заметно только при $\kappa \leq 0.2$, а при $\kappa > 0.2$ оно практически исчезает. Последнее связано с тем обстоя-

тельством, что процесс на данных глубинах носит уже квазистатический характер, когда зависимость $\sigma(\varepsilon)$ для данной частицы приближается к статической диаграмме сжатия $f(\varepsilon)$.

Соответствующие кривые $\sigma(\varepsilon)$ при $\kappa=0.25$, иллюстрирующие этот процесс, представлены на фиг. 3 (кривые 1–4 соответствуют глубинам $h=0.062, 0.125, 0.187, 0.25$).

Отметим, что время прихода волны к данной частице существенно зависит от κ при $h \geq 0.06$, что подтверждает выводы [13] о том, что в вязкопластической среде, начиная с некоторой глубины, слабые возмущения не распространяются со скоростью характеристик.

На фиг. 4 представлены кривые, характеризующие затухание максимальных напряжений σ^m в зависимости от изменения параметра η . Здесь принято $\kappa=0.25, n=10$.



Фиг. 4

Кривые 1–4 на фиг. 4, а соответствуют различным глубинам: $h=0.06$ (кривая 1), $h=0.125$ (кривая 2), $h=0.187$ (кривая 3), $h=0.25$

(кривая 4), а кривые 1–5 фиг. 4, б – различным значениям безразмерного коэффициента вязкости η : $\eta = 0$ (кривая 1), $\eta = 1$ (кривая 2), $\eta = 5$ (кривая 3), $\eta = 10$ (кривая 4), $\eta = 20$ (кривая 5).

Из фиг. 4, а видно, что величина σ^m/σ_0 при увеличении η вначале убывает, а затем возрастает и в дальнейшем стремится к некоторой постоянной величине. Последнее обстоятельство связано с выходом процесса на квазистатический режим. Причем при $\eta = 20$ этот момент наступает практически уже на глубине $h = 0.06$.

Кривая 1 фиг. 4, б характеризует затухание максимальных напряжений при $\eta = 0$, что соответствует случаю упругопластической среды, если полагать, что диаграмма ее сжатия при нагружении соответствует $\varphi(\varepsilon)$, а при разгрузке E_* изменяется согласно (1.4).

Максимальное затухание, как следует из фиг. 4, б имеет место при $\eta = 1$ (кривая 2), а минимальное – при $\eta \geq 20$, когда процесс деформирования среды выходит на квазистатический режим.

Величина n существенно влияет на интенсивность затухания максимальных напряжений. В частности, для рассмотренных выше условий имеем для различных глубин h и $n = 1 \div 10$ следующие значения σ^m/σ_0 :

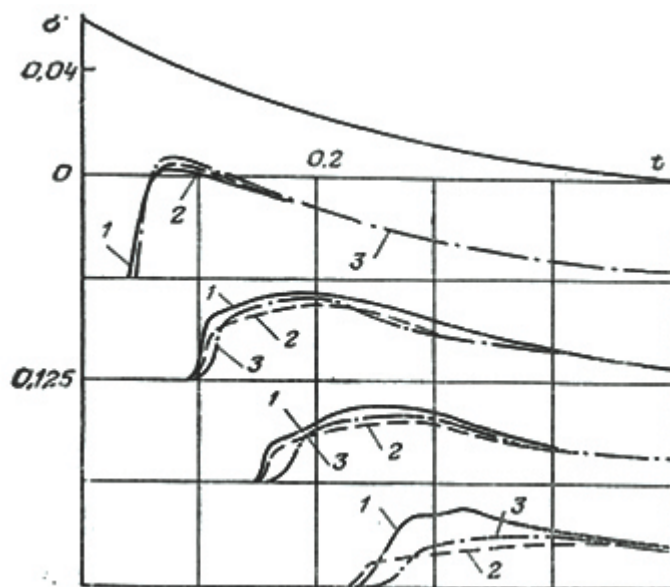
h	$n = 1$	$n = 5$	$n = 10$
0.062	0.95	0.85	0.70
0.125	0.90	0.65	0.48
0.250	0.80	0.40	0.25

Рассмотрим вопрос о влиянии неоднородности на распространение волн напряжений. Результаты соответствующих расчетов представлены на фиг. 5, 6. Здесь $\sigma_0 = 0.06, \kappa = 0.5, \eta = 3.1, n = 4.7$. На фиг. 5 результаты соответствуют неоднородной среде: $k_1 = 2, n_1 = n_2 = 1$, (кривая 1); $k_2 = 2, n_1 = n_2 = 1$, (кривая 2); кривая 3 соответствует однородной среде $n_1 = n_2 = 0$.

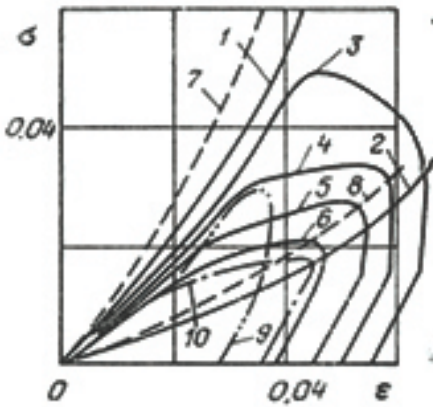
Из фиг. 5 видно, что в неоднородной среде при $k_1 = k_2$ и $n_1 = n_2$ максимальные напряжения затухают менее интенсивно, чем в однородной среде. При $h = 0.25$ максимальные напряжения в неоднородной среде в полтора раза больше, чем в однородной (кривые 1 и 3). Максимальные напряжения в неоднородной среде в случае, когда статическая диаграмма

сжатия не изменяется с глубиной $n_2=0$, меньше, чем в однородной среде (кривые 2 и 3). Время нарастаний напряжений до максимального значения t_+ на глубинах $h \leq 0.2$ практически совпадает для всех рассмотренных случаев. Однако уже при $h=0.25$ величины t_+ при $n_2=1$ почти в два раза меньше, чем в однородной среде.

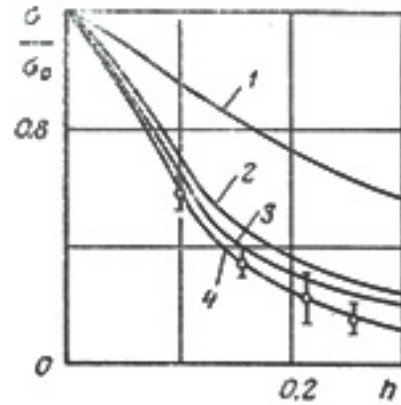
На фиг. 6 представлены кривые $\sigma(\varepsilon)$, соответствующие результатам фиг. 5. Кривые 1, 2 соответствуют предельной динамической $\varphi(0, \varepsilon)$ (кривая 1) и статической $f(0, \varepsilon)$ (кривая 2) диаграммам сжатия. Кривые 3, 4, 5, 6 соответствуют глубинам $h=0.06, 0.125, 0.187$ и 0.25 . Кривые 7 и 8 – предельная динамическая (кривая 7) и статическая (кривая 8) диаграммы сжатия на глубине $h=0.25$, а кривые 9 и 10 соответствуют неоднородной среде при $n_2=1$ (кривая 9) и $n_2=0$ (кривая 10).



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Из фиг. 6 видно, что с увеличением глубины кривые $\sigma(\varepsilon)$ приближаются к статической диаграмме $f(h, \varepsilon)$. При этом для неоднородной среды при $n_2 = 0$ этот процесс происходит наиболее быстро.

Параметры полей напряжений, определенные с использованием модели (1.1) при $E_* = E_1(h, \varepsilon)$ применительно к исходным данным фиг. 3, практически не отличаются от результатов фиг. 5.

Более заметны различия в деформациях $\varepsilon(t)$ на различных глубинах. Однако при коротких нагрузках (и, соответственно, малых η) эти различия становятся весьма существенными как для напряжений, так и для деформаций. В частности, на фиг. 7 представлены кривые, характеризующие затухание максимальных напряжений в песчаном грунте при взрывах на поверхности зарядов детонирующего шнура, рассчитанные при различных законах деформирования. При этом применительно к условиям рассматриваемых ниже экспериментов принято $n = 11$, а размерное время действия нагрузки τ составляет 0.02 сек. Кривые 1, 3 соответствуют вязкопластической среде при $\kappa = 0.5, \eta = 0.316$ и $E_* = E_1(\varepsilon)$ (кривая 1), $E_* \neq E_1(\varepsilon)$ (кривая 3). Кривая 2 соответствует упругопластической среде $\eta = 0$, диаграмма сжатия которой при нагружении — $\varphi(\varepsilon)$, а разгрузка происходит согласно (1.4).

Кривая 4 – экспериментальная, получена по результатам измерений напряжений в песчаном грунте, механические характеристики которого соответствуют [4]. Измерения напряжений производились с помощью тензометрических датчиков. Схема измерений и условия эксперимента были аналогичны [14]. Систематические погрешности датчиков в данных опытах не превышали 5–7 %, а средний коэффициент вариации за счет случайных погрешностей составлял $\pm(0.2 \div 0.25)$.

Точки на фиг. 7 – средние арифметические значения максимальных напряжений по результатам 5–10 измерений с соответствующими доверительными интервалами, определенными с надежностью 0.90. Как видно из фиг. 7, различия в напряжениях $\sigma^m(h)$ (кривые 1 и 3), соответствующих различным вариантам модели (1.1), в случае коротких нагрузок, которые имели место в опытах, весьма существенны. Причем при $E_* \neq E_1(\varepsilon)$ затухание максимальных напряжений с глубиной происходит более интенсивно, чем при $E_* = E_1(\varepsilon)$, а кривая 3 практически лежит в пределах доверительных интервалов для экспериментальных точек при $h < 0.25$. Кривая 1 существенно выходит за эти доверительные интервалы и, таким образом, с достаточной надежностью не описывает эксперимент.

Малое отличие кривой 2 от кривых 3, 4 связано с тем, что в условиях данного эксперимента характер нагружения близок к ударному.

Таким образом, для определения максимальных напряжений в случае малых величин η можно применять упругопластическую теорию, используя в качестве характеристики предельную динамическую диаграмму. При больших величинах η , как следует из фиг. 4, эти различия становятся существенными.

Характер изменения напряжений во времени в грунте, рассматриваемом как вязкопластическая среда, отличается существенно для всех η . Это связано прежде всего с тем, что предельные динамические диаграммы $\varphi(\varepsilon)$ в песчаных грунтах различной влажности удовлетворяют условию $\partial^2 \varphi / \partial \varepsilon^2$, как показали результаты специально поставленных экспериментальных исследований [15, 16]. При этом условии ударная волна в пластической среде распространяется на значительное расстояние. В то же время в вязкопластической среде, как следует из [5] и приведенных выше результатов, ударная волна затухает вблизи свободной поверхности и в дальнейшем в среде распространяется непрерывная волна сжатия. Последнее подтверждается экспериментально.

Экспериментальная проверка предлагаемой теории производилась в условиях распространения одномерных волн. Результаты этой проверки, вообще говоря, не могут служить исчерпывающим обоснованием для распространения уравнения состояния на более общий случай неодномерных движений. В связи с этим необходимой является проверка предлагаемых уравнений состояния в более жестких условиях сложного напряженного состояния.

Литература

1. Кристеску Н. О распространении продольных волн в тонких упруговязкопластических стержнях // Сб. переводов «Механика». 1966, № 3. С. 87–96.
2. Lubliner J. A general theory of strain-rate dependent plastic wave propagation in bars // J. Meeh, and Phys. Solids, 1964. Vol. 12, No. 1. P. 59–65.
3. Рыков Г. В. Влияние скорости деформирования на сжимаемость и сдвиг песчаных и глинистых грунтов при кратковременных динамических нагрузках // ПМТФ, 1969, № 3. С. 155–160.
4. Котов А. И., Нарожная З. В., Рыков Г. В., Сутырин В. П. Экспериментальные исследования сжимаемости песчаных грунтов в условиях пластичности при кратковременных динамических нагрузках // ПМТФ, 1976, № 5. С. 140–146.
5. Зубкова А. Н., Рыков Г. В. Распространение одномерных волн напряжений в вязкопластической среде // Сб. Материалы V Всесоюзного симпозиума по распространению упругих и упругопластических волн. Алма-Ата, «Наука», 1973. С. 165–173.
6. Ляхов Г. М., Пачепский Я. А. Об учете вязких и пластических свойств при решении волновых задач // ПМТФ, 1973, № 2. С. 114–120.
7. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: «Мир», 1967. С. 212–263.
8. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов // ПММ, 1962. Т. 24, № 6. С. 1057–1072.
9. Соколовский В. В. Распространение упруговязкопластических волн в стержнях // ПММ, 1948. Т. 12, вып. 3. С. 261–280.
10. Малверн Л. Распространение продольных пластических волн с учетом влияния скорости деформации. Сб. переводов «Механика». 1952. Т. 11. № 1. С. 153–161.
11. Richtmyer R. D., Morton K. W. Difference methods for initial-value problems. N.-Y.; L.: Intersci. 1967. 419 p. = Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. 418 с.

12. Фачиоли Э., Анг А. Х.-С. Дискретная эйлерова модель распространения сферической волны в сжимаемой среде // Сб. Действие ядерного взрыва. М.: «Мир», 1971. С. 163–263.
13. Скобеев А. М. Волна нагружения в вязкопластической среде. Инж. ж., МТТ, 1967, № 2. С. 139–142.
14. Нарожная З. В., Рыков Г. В. О погрешностях измерения напряжений в грунтах при кратковременных нагрузках // ПМТФ, 1972, № 4. С. 146–154.
15. Котов А. И., Рыков Г. В. О методе определения предельных динамических диаграмм сжатия для грунтов и пористых сред, чувствительных к скорости деформирования // ПМТФ, 1977, № 2. С. 130–134.
16. Нарожная З. В., Рыков Г. В. О методе и результатах определения механических характеристик грунтов с учетом их вязкопластических свойств при кратковременных динамических нагрузках // ПМТФ, 1977, № 5. С. 141–148.

Комментарии

1. Статья «Распространение плоских одномерных волн напряжений в неоднородной вязкопластической среде с нелинейными характеристиками» опубликована в журнале «Известия АН СССР. Механика твердого тела», № 3, 1978. С. 99–106; поступила в редакцию 2.12.1976. Авторы статьи – И. И. Неццетов и доктор технических наук Герман Васильевич Рыков (1933–1994), основными научными интересами которого являлось распространение волн напряжений в грунтах и определение параметров моделей грунтов. Именно этим обстоятельством объясняется обилие ссылок на экспериментальные исследования в работе, посвященной численному решению системы уравнений в частных производных.

2. Дополнительные сведения о моделях грунтов и соответствующих экспериментальных исследованиях можно получить в монографии {1}. Отметим, что необходимость проверки предлагаемой модели грунта в условиях сложного напряженного состояния, о чем речь идет в последнем абзаце статьи, осталась невыполненным пожеланием.

3. Сейчас трудно поверить тому, что в середине 70-х гг. прошлого века обычному пользователю ЭВМ БЭСМ-4 (а именно таким являлся первый автор работы) предоставлялось 4 килобайта оперативной памяти. С учетом того, что действительное число занимало в памяти 4 байта, а также с требованием счета для времен $t \geq 2$, это обстоятельство делало принятие граничного условия в виде (2.8) необходимым для проведения расчетов.

4. В то время, когда была написана статья, единственными алгоритмами численного решения систем гиперболических уравнений являлись маршевые алгоритмы газовой динамики. Анализ решения системы (2.1) показал, что они недостаточно эффективны при решении задач механики твердого деформируемого тела. Использование искусственной вязкости (в частности, ее линейного члена), естественной для описания скачков давления на ударных волнах в газах, приводит к появлению «параболического члена» в системе (1.1). Вместе с тем, согласно постановке задачи, решение исходной системы уравнений не зависит от температуры. Этот факт послужил побудительным мотивом для разработки алгоритмов, приведенных в главах 3, 4, 5 и 7 и построенных на других принципах.

{1} Рыков Г. В., Скобеев А. М. Измерение напряжений в грунтах при кратковременных нагрузках. М. Наука, 1978. 168 с.

Глава 2. Соударение цилиндрических пластин с учетом накопления микропор

Известно, что впервые откольные явления были обнаружены В. Гопкинсоном при исследовании процесса соударения стержней [1]. Первоначально принималось, что откол происходит мгновенно в тот момент времени, когда растягивающие напряжения превосходят некоторое критическое значение [1, 2]. В дальнейшем экспериментальные исследования показали, что для описания откольных явлений нужно использовать более сложные критерии, учитывающие не только величину растягивающих напряжений, но и также скорость деформирования материала [3, 4]. Последние экспериментальные материалы [5–7] свидетельствуют о том, что откольные явления представляют собой сложный физико-механический процесс, сопровождающийся накоплением в среде микропор или микротрещин. В [8] для исследования откольных явлений в металлах (медь, алюминий, свинец) предлагается система уравнений, описывающая движения сплошной среды с учетом накопления микропор. В этой системе процесс накопления микропор моделируется кинетическим уравнением, в котором учитывается зарождение микропор и их дальнейший рост под действием растягивающих напряжений. Скорость зарождения и рост микропор определяются по эмпирическим формулам из [5–7]. Для описания поведения среды с микропорами принимается модель нелинейной, вязкоупругой среды [9, 10], в которой внутренняя энергия зависит от инвариантов тензора деформации, энтропии и удельного объема микропор.

В данной работе принимается, что свойства среды описываются системой уравнений из [8], и решается задача соударения двух цилиндрических пластин конечной толщины. Решение получено численно при помощи разностной схемы Лакса для случая двух пространственных переменных. Рассмотрены и проанализированы отдельно случаи соударения, когда не учитываются релаксация напряжений и накопление микропор, соударение с учетом накопления микропор, влияние релаксационных свойств среды на напряженное состояние среды, соударение пластин с учетом релаксационных свойств среды и накопления микропор.

1. Будем рассматривать осесимметричные движения сплошной среды в цилиндрической системе координат $x^1 = r, x^2 = \varphi, x^3 = z$. Обозначим через t время, ρ – плотность, ρ_0 – плотность среды в начальный момент времени, g_{ij} – компоненты метрического тензора, σ^{ij} – компо-

ненты тензора напряжений, ε_{ij} – компоненты тензора эффективных упругих деформаций [10] (ниже будет использоваться более краткое выражение тензора деформаций), v^i – компоненты вектора скорости, V – удельный объем микропор, c_1, c_2 – скорости продольных и поперечных волн в недеформированном состоянии, L – параметр, имеющий размерность длины (например, радиус одной из пластин).

Введем далее безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} t' &= c_1 t / L, r' = r / L, z' = z / L, \rho' = \rho / \rho_0, v_r = v^1 / c_1, v_z = v^3 / c_1, \sigma_r = \sigma^{11} / \rho_0 c_1^2, \\ \sigma_z &= \sigma^{33} / \rho_0 c_1^2, \sigma_\varphi = r^2 \sigma^{22} / \rho_0 c_1^2, \tau = \sigma^{13} / \rho_0 c_1^2, \varepsilon_r = \varepsilon_{11}, \varepsilon_z = \varepsilon_{33}, \varepsilon = \varepsilon_{13}, \varepsilon_\varphi = \varepsilon_{22} / r \end{aligned}$$

Тогда система уравнений из [8], описывающая нестационарные осесимметричные движения нелинейной вязкоупругой среды с учетом накопления микропор, в безразмерных переменных записывается в следующем виде (для простоты штрихи у переменных опущены):

$$\frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho r v_r^2)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho r v_z v_r)}{\partial z} = \frac{\partial(r \sigma_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r \tau)}{\partial z} - \sigma_\varphi \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial(\rho r v_z)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho r v_z v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho r v_z^2)}{\partial z} = \frac{\partial(r \tau)}{\partial r} + \frac{\partial(r \sigma_z)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial t} = (1 - 2\varepsilon_r) \frac{\partial v_r}{\partial r} - 2\varepsilon \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\varepsilon_r - (\varepsilon_z + \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi) / 3}{\tau_0},$$

$$\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} = (1 - 2\varepsilon_z) \frac{\partial v_z}{\partial z} - 2\varepsilon \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\varepsilon_z - (\varepsilon_z + \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi) / 3}{\tau_0}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{2} (1 - 2\varepsilon_r) \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{1}{2} (1 - 2\varepsilon_z) \frac{\partial v_z}{\partial r} - \varepsilon \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\tau_0} \right),$$

$$\frac{d\varepsilon_\varphi}{dt} = (1 - 2\varepsilon_\varphi) \frac{v_r}{r} - \frac{\varepsilon_\varphi - (\varepsilon_z + \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi) / 3}{\tau_0}$$

$$\frac{dV}{dt} = \left[N_0 \exp\left(\frac{p - p_{n0}}{p_1}\right) \theta(p - p_{n0}) + \frac{3(p - p_{g0})}{4\eta} \right] \frac{L}{c_1} \quad (1.3)$$

Здесь $N_0, p_{n0}, p_{g0}, p_1, \eta$ – постоянные, численные значения которых приведены ниже, $\theta(x)$ – функция Хевисайда, время релаксации τ_0 считается известной функцией $\tau_0 \triangleq \tau_0(I_1, I_2, I_3)$ от инвариантов I_1, I_2, I_3 тензора деформаций: $I_1 = \varepsilon_\alpha^\alpha, I_2 = \varepsilon_\beta^\alpha \varepsilon_\alpha^\beta, I_3 = \varepsilon_\beta^\alpha \varepsilon_\gamma^\beta \varepsilon_\alpha^\gamma, \varepsilon_\beta^\alpha = g^{\beta i} \varepsilon_{ai}$.

Плотность ρ определяется по формуле

$$\rho = \rho_0 \left(\det \|g_{ij} - 2\varepsilon_{ij}\| / \det \|g_{ij}\| \right)^{1/2} \quad (1.4)$$

а компоненты тензора напряжений – по формулам Мурнагана [11]:

$$\sigma_j^i = \rho (\delta_\alpha^i - 2\varepsilon_\alpha^i) \frac{\partial E}{\partial \varepsilon_\alpha^j} \quad (1.5)$$

где $E = E(I_1, I_2, I_3, V)$ – внутренняя энергия единицы масса (выражение для E будет приведено ниже), δ_α^i – символ Кронекера, $\sigma_j^i = g_{\alpha j} \sigma^{i\alpha}$.

Принимая во внимание (1.4), легко показать, что уравнение неразрывности является следствием уравнений (1.2) и поэтому явно не рассматривается.

В системе (1.1) – (1.3) уравнения (1.1) выражают закон сохранения импульса. В уравнениях (1.2) слагаемые, пропорциональные компонентам дивергенции тензора деформаций $(\varepsilon_{ij} - g_{ij} \varepsilon_\alpha^i / 3) / \tau_0$, описывают процесс релаксации напряжений. Последнее уравнение (1.3) описывает процесс накопления микропор, причем первое слагаемое в правой части (1.3) определяет изменение удельного объема микропор за счет зарождения микропор, второе – за счет роста образовавшихся микропор в поле напряжений.

Если в системе (1.1) – (1.3) не рассматривать последнее уравнение, а в остальных положить $V \equiv 0$ и считать также, что $\tau_0 \rightarrow \infty$, тогда уравнения (1.1), (1.2) описывают движения нелинейно-упругой среды при конечных деформациях. При $\tau_0 \rightarrow \infty$ система (1.1) – (1.3) описывает движения нелинейно-упругой среды с учетом процесса накопления микропор.

2. Рассмотрим задачу соударения двух цилиндрических пластин конечной толщины. Примем, что одна из пластин – мишень – покоится, а другая – ударник – движется в направлении мишени со скоростью v_0 . Обозначим радиус ударника через R_1 , толщину ударника через H_1 , радиус мишени через R_2 ($R_2 \geq R_1$), толщину мишени через H_2 , $H_2 > H_1$. Будем считать, что ось симметрии пластин совпадает с осью OZ , а плоскости контакта пластин в момент соударения $t=0$ соответствует координата $z = H_1$, т. е. в переменных r, z ударнику соответствует прямоугольник $G_1 = \{0 \leq r \leq R_1, 0 \leq z \leq H_1\}$, $G_2 = \{0 \leq r \leq R_2, H_1 \leq z \leq H_1 + H_2\}$.

Пусть $G = G_1 \cup G_2, \Gamma$ – множество граничных точек области G . Произвольную точку области G с координатами r, z обозначим через P . Тогда функции $v_r, v_z, \varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z, \varepsilon, V$, характеризующие состояние среды

в процессе соударения, определяются из следующей краевой задачи.

В области G при $t > 0 (t \leq T)$ найти решение системы (1.1) – (1.3), удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} \tau(t, r, 0) = \sigma_z(t, r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq R_1, \\ \tau(t, R_i, z) = \sigma_z(t, R_i, z) = 0, \quad i = \begin{cases} 1, & 0 \leq z \leq H_1, \\ 2, & H_1 \leq z \leq H_1 + H_2, \end{cases} \quad (2.1) \\ \tau(t, r, H_1 + H_2) = \sigma_z(t, r, H_1 + H_2) = 0, \quad 0 \leq r \leq R_2 \end{aligned}$$

и начальным условиям

$$\begin{aligned} v_r(0, P) = \varepsilon_r(0, P) = \varepsilon_z(0, P) = \varepsilon_\varphi(0, P) = \varepsilon(0, P) = V(0, P) = 0, \\ v_z(0, P) = 0, \quad P \in G_2, \quad v_z(0, P) = v_0, \quad P \in G_1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

На линии контакта ставится условие прилипания, т. е. смещения u_r, u_z непрерывны при $z = H_1, 0 \leq r \leq R_1$. Из требования симметрии вытекают также условия $v_r = 0, \tau = 0$ при $r = 0$.

3. Для решения сформулированной выше краевой задачи используется конечно-разностная схема Лакса, обобщенная на случай двух пространственных переменных. Опишем кратко алгоритм расчета. Введем вектор $\mathbf{W} = (v_r, v_z, \varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z, \varepsilon, V)$. Тогда систему можно записать в следующем матричном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{W}) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial r} + \mathbf{B}(\mathbf{W}) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial z} + \mathbf{f}(\mathbf{W}) = 0 \quad (3.1)$$

где \mathbf{A}, \mathbf{B} – квадратные матрицы размерности $7 \times 7, \mathbf{f} = \{f^1, f^2, \dots, f^7\}$.

В этих обозначениях разностная схема записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{ij}^{n+1} = \frac{1}{4} (\mathbf{W}_{i+1j}^n + \mathbf{W}_{i-1j}^n + \mathbf{W}_{ij+1}^n + \mathbf{W}_{ij-1}^n) - \\ - \mathbf{A} \frac{\Delta t}{2h} (\mathbf{W}_{i+1j}^n + \mathbf{W}_{i-1j}^n) - \mathbf{B} \frac{\Delta t}{2h} (\mathbf{W}_{ij+1}^n + \mathbf{W}_{ij-1}^n) \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\mathbf{W}_{ij}^n = \mathbf{W}(\Delta t, ih, jh)$, Δt – шаг по времени, h – шаг по пространственным переменным.

Очевидно, что схема (3.2) аппроксимирует (3.1) с первым порядком по Δt и вторым – по h .

Устойчивость нелинейных задач, как правило, проверяется численными расчетами. Однако, опираясь на принцип замороженных коэффициентов, можно получить значительную информацию об устойчивости нелинейной задачи и при исследовании устойчивости линеаризованной задачи [12]. Для рассмотренной выше разностной схемы в линейном случае

необходимое условие устойчивости Неймана будет выполнено, если

$$\sqrt{2c_1\Delta t}/h < 1 \quad (3.3)$$

Для расчета значений \mathbf{W}_{ij}^{n+1} в граничных точках области G используются граничные условия $\tau=0, \sigma_r=0$ (либо $\sigma_z=0$), причем из условия $\tau=0$ следует, что $\varepsilon=0$ и наоборот. Остальные функции $v_r, v_z, \varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, V$ определяются из конечно-разностных соотношений, получающихся при аппроксимации соответствующих уравнений по схеме типа «уголок».

На оси симметрии величины \mathbf{W}_{ij}^{n+1} определяются из следующих соотношений:

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial r} = v_r = \varepsilon = 0 \quad (3.4)$$

Будем рассматривать величину аппроксимационной вязкости разностной схемы (3.2). Разлагая соотношение (3.2) в ряд Тэйлора до членов второго порядка малости по Δt и по h и отбрасывая малые более высокого порядка, получим следующее векторное уравнение (при $j \equiv 0$):

$$\frac{\partial \mathbf{W}_h}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}_h}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{W}_h}{\partial z} = \left[-\frac{\Delta t}{2} \left(\mathbf{A} \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{B} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 + \frac{h^2}{4\Delta t} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] \mathbf{W}_h \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5), являющееся дифференциальным приближением [12] схемы (3.2), имеет частное решение, представляющее собой затухающую бегущую волну

$$\mathbf{W}_h = \mathbf{W}_0 \exp \left\{ i \left[\omega (\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_1 r + \alpha_2 z \right] \right\} \exp \left\{ -\frac{h^2 t}{2\Delta t} \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{\omega \Delta t}{h} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.6)$$

где $\omega(\alpha_1, \alpha_2)$ – собственное значение, \mathbf{W}_0 – собственный вектор матрицы $\mathbf{Q} = \omega(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{B}$, \mathbf{I} – единичная матрица, $\alpha_1 = \partial \varphi / \partial r$, $\alpha_2 = \partial \varphi / \partial z$, φ – характеристическая поверхность системы (1.1, 1.2). Затухание волны определяется величиной параметра μ [12], называемого аппроксимационной вязкостью $\mu = h^2 / (2\Delta t) \left[1/2 - (\omega \Delta t / h)^2 \right]$. При $\mu = 0$ волна распространяется без затухания; так как из условия устойчивости $1/2 - (\omega \Delta t / h)^2 \geq 0$, то при $\Delta t / h = \text{const}$ аппроксимационная вязкость пропорциональна h .

Расчет проводился на равномерной сетке, имеющей 30 узлов по переменной r и 30 узлов по переменной z .

4. В данной работе исследуется соударение медных пластин. Внутренняя энергия для меди определяется по интерполяционной формуле, предложенной в [13] для изучения процессов в переходной области, когда сжатие близко к единице, $\rho' \sim 1$, но уже существенны нелинейные свойства среды. В этом случае нельзя ограничиться рассмотрением шарового тензора деформаций и необходимо учитывать энергию формоизменения. В интерполяционной формуле энергия формоизменения учитывается сложным, которое в случае малых деформаций совпадает с энергией формоизменения в линейной теории упругости.

$$E(\rho', D) = \frac{1}{2} \rho_0 \left[\left(c_1^2 - \frac{4}{3} c_2^2 \right) e_0(\rho') + 2c_2^2 e_1(\rho') D \right] \quad (4.1)$$

Интерполяционная формула аппроксимирует исходное уравнение состояния с точностью 5 %, если $0.9 \leq \rho' \leq 1.0$, и с точностью 1 %, если $1 \leq \rho' \leq 2$.

В (4.1) $D = (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)/2$, $d_i = \ln(a_i / \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3})$, $a_i = 1/\sqrt{1 - 2\varepsilon_i}$, $i = 1, 2, 3$,

$$e_0(\rho') = 1 + (\rho' - 1) \left[e_{00} + \frac{e_{10} + \frac{3e_{01}(\ln \rho' + 1 - \rho') + (\rho' - 1)^2}{2}}{(\rho' - 1)^3} \right],$$

$$e_1(\rho') = 1 + e_{11}(\rho' - 1) + e_{12}(\rho' - 1)^2 + e_{13}(\rho' - 1)^3,$$

$$e_{00} = -0.0903, e_{10} = -0.04765, e_{01} = -0.8323, e_{11} = 3.4054, e_{12} = 0.8909, e_{13} = -0.4050,$$

ε_i – главные значения тензора деформации. Численные значения постоянных, входящих в (1.3), (1.4), равны: $\rho_0 = 8.9 \cdot 10^3$ кг/м³, $c_1 = 4651$ м/с, $c_2 = 2141$ м/с, $p_{n0} = 5 \cdot 10^8$ Н/м², $p_1 = 2 \cdot 10^8$ Н/м², $p_{g0} = 5 \cdot 10^8$ Н/м², $\eta = 20$ Нс/м², $N_0 = 20.7751$ с.

5. Результаты численных расчетов. Рассмотрим вначале случаи соударения пластин, когда не учитывается релаксация напряжений и накопление микропор. Следует отметить, что характер полей напряжений, а также максимальные значения $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\varphi$ и p существенно зависят от соотношения геометрических размеров ударника и мишени. В работе рассмотрены результаты расчетов при следующих значениях отношения ударника R_1 и радиуса мишени R_2 : $R_1 = R_2$, $R_1/R_2 = 2/3$, $R_1/R_2 = 1/2$.

Анализ полей напряжений в стадии растяжения показывает, что во всех трех случаях с течением времени изменяются не только максимальные значения компонент $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\varphi$ и давления p , но также и координаты точек, в которых каждая из компонент принимает свое максимальное значение. Оказывается, что в стадии растяжения наибольшие значения $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\varphi$ и p на определенном интервале времени превышают наибольшие значения

$\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\varphi, p$ в стадии сжатия. Приведем численные значения в случае соударения пластин с одинаковыми радиусами $R_1 = R_2 = 1$, толщины которых равны $H_1 = 0.333, H_2 = 0.5$, скорость соударения $v_0 = 100$ м/с. Наибольшие значения сжимающих напряжений равны (по абсолютной величине): $\sigma_r = 0.014, \sigma_z = 0.012, \sigma_\varphi = 0.012, p = 0.0126$.

Максимальные значения растягивающих напряжений в различные моменты времени t представлены ниже (r и z – координаты точек, в которых соответствующие напряжения достигают максимума)

σ_r	0.0096	0.0128	0.0126	σ_z	0.0123	0.0171	0.0166
t	0.733	0.857	0.981	t	0.733	0.857	0.981
r	0.701	0.605	0.128	r	0.60	0.465	0.121
z	0.790	0.70	0.352	z	0.790	0.70	0.352
σ_φ	0.0085	0.0119	0.0119	p	0.010	0.0139	0.0137
t	0.733	0.857	0.981	t	0.733	0.857	0.981
r	0.70	0.465	0.121	r	0.60	0.465	0.121
z	0.790	0.70	0.352	z	0.790	0.70	0.352

Видно, что при $t = 0.733$ величины $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\varphi, p$ принимают свои максимальные значения в точках, расположенных вдали ($r \approx 0.6$) от оси симметрии, но в последующие моменты времени эти точки смещаются в направлении оси симметрии. Наибольшие значения σ_z и p в стадии растяжения оказываются приблизительно на 20 % больше, чем в стадии сжатия. Приведем также максимальные значения $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\varphi$ и p для случая соударения пластин с отношением радиусов $R_1/R_2 = 2/3$ (для тех же моментов времени $t = 0.733, 0.857, 0.981$)

σ_r	0.0089	0.0150	0.0105	σ_z	0.0119	0.0188	0.0141
r	0.40	0	0.240	r	0.285	0	0.240
z	0.570	0.50	0.40	z	0.80	0.60	0.40
σ_φ	0.0094	0.0145	0.0102	p	0.0097	0.0161	0.0116
r	0.40	0	0.240	r	0.40	0	0.240
z	0.570	0.50	0.40	z	0.570	0.50	0.40

Сопоставляя эти два случая, легко видеть, что начиная с $t = 0.857$ максимальные значения растягивающих напряжений при $R_1/R_2 = 2/3$

приблизительно на 10–15 % больше, чем при $R_1 = R_2$. Ниже представлены значения $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\phi$ и p для случая $R_1/R_2 = 1/2$.

t	z	σ_r	σ_z	σ_ϕ	P
0.733	0.536	0.0127	0.0148	0.0112	0.0129
0.857	0.536	0.0115	0.0136	0.0092	0.0117
0.981	0.320	0.0075	0.0112	0.0070	0.0086

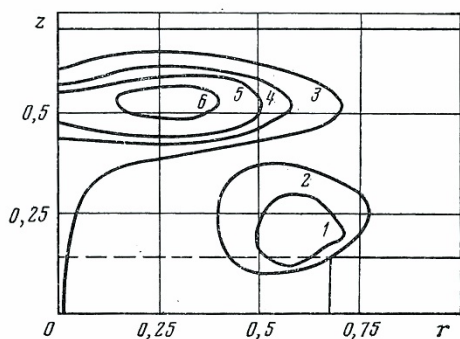
При $t = 0.733$ максимальные значения растягивающих напряжений $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\phi$ и p при соударении пластин с отношением радиусов $R_1/R_2 = 1/2$ больше, чем максимальные значения $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\phi, p$ при $R_1/R_2 = 2/3$.

Эти результаты объясняются следующим образом. Анализ полей напряжений показывает, что в момент времени $t = 0.857$ при соударении пластин с одинаковыми радиусами фронт тороидальной волны разгрузки, распространяющейся в направлении оси симметрии, не достигает точек, лежащих на оси, тогда как при соударении пластин с отношением радиусов $R_1/R_2 = 2/3$ фронт тороидальной волны разгрузки пересекается с осью симметрии и порождает расходящуюся волну разгрузки. В результате интерференции этих волн в области, ограниченной фронтом расходящейся волны разгрузки, напряжения $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\phi$ и p оказываются больше, чем напряжения $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\phi, p$ за фронтом тороидальной волны разгрузки при соударении одинаковых пластин. Для иллюстрации указанных выше результатов приведем также поля давлений, соответствующие соударению двух цилиндрических пластин. При расчетах радиус ударника принимался равным $R_1 = 0.666$, радиус мишени $R_2 = 1$, толщина ударника $H_1 = 0.18$, толщина мишени $H_2 = 0.5$. На фиг. 1 показано поведение линий уровня $p = \text{const}$ в момент времени $t = 0.733$ (для сравнения укажем, что продольная волна пробегает расстояние $H_1 + H_2$ за время $t \approx 0.68$).

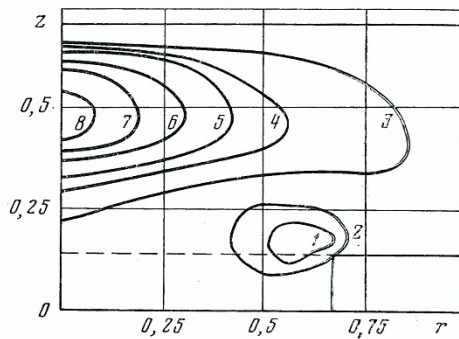
Значения $p = -0.001, 0.03, 0.0055, 0.0075, 0.09$ соответствуют линиям 1–6. Из этой фигуры видно, что максимальное значение $p = 0.0097$ достигается в точке с координатами $r = 0.31, z = 0.5$.

Поведение линий уровня $p = \text{const}$ в момент времени $t = 0.857$ показано на фиг. 2; здесь линиям 1–8 соответствуют значения $p = -0.001, 0.03, 0.0055, 0.0075, 0.01, 0.012, 0.015$.

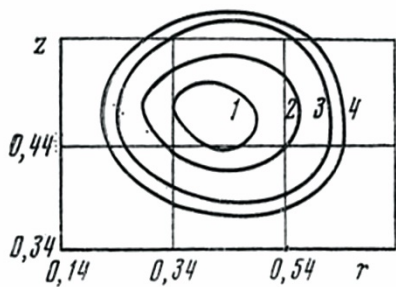
2. Соударение цилиндрических пластин с учетом накопления микропор



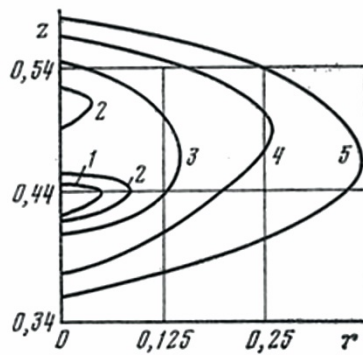
Фиг. 1



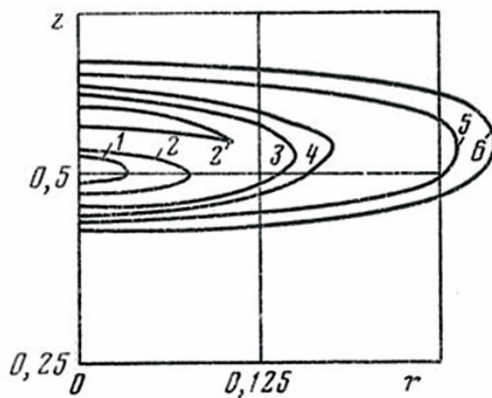
Фиг. 2



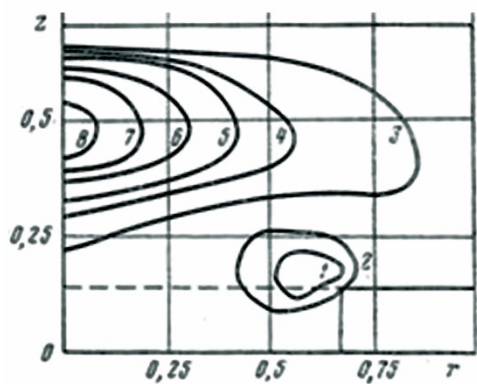
Фиг. 3



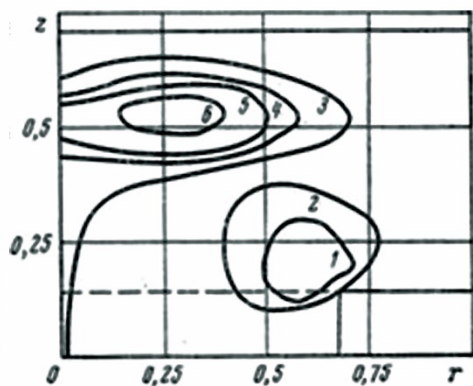
Фиг. 4



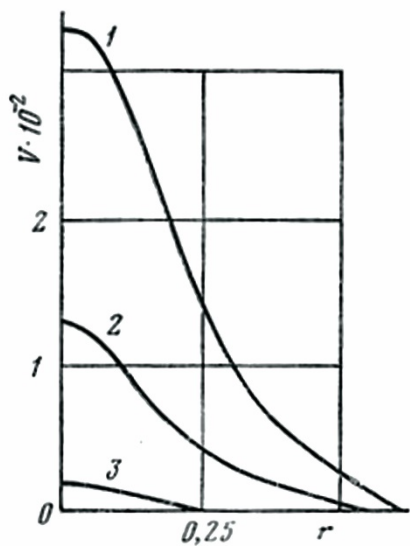
Фиг. 5



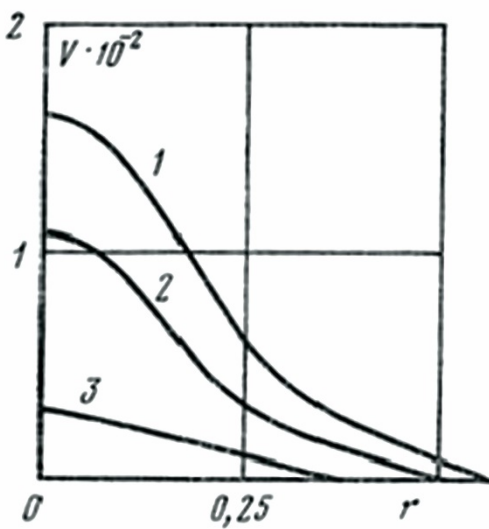
Фиг. 6



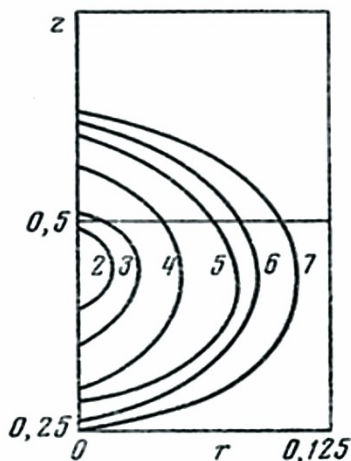
Фиг. 7



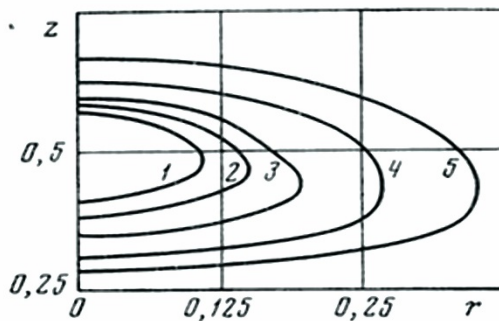
Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10



Фиг. 11

В этом случае максимальное значение $p=0.0159$ достигается в точке, лежащей на оси симметрии $r=0, z=0.465$, и приблизительно на 30 % превышает максимальное значение давления на стадии сжатия. Не останавливаясь подробно на анализе полей напряжений $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\varphi$ перейдем к численным результатам, характеризующим процесс накопления микропор.

Рассмотрим вначале случай соударения пластин с одинаковыми радиусами $R_1 = R_2 = 1$. В расчетах толщина ударника принималась равной $H_1 = 0.143$, толщина мишени $H_2 = 0.5$.

Выше отмечалось, что в стадии растяжения максимальные значения напряжений $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\varphi$ и p , превышающие наибольшие значения $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\varphi$ и p в стадии сжатия, первоначально возникают во внутренних точках области G и только через определенный промежуток времени на оси симметрии действуют максимальные растягивающие напряжения.

Оказывается, что поля значений величины V обладают такой же характерной особенностью. Так, при $t=0.981$ максимальное значение $V=0.0124$ достигается в точке с координатами $r=0.474, z=0.5$. Поведение линий уровня $V = \text{const}$ в этот же момент времени показано на фиг. 3; здесь линиям 1–4 соответствуют значения $V=0.01, 0.005, 0.0013, 0.0006$

и видно, что при $r=0, 0 \leq z \leq H_1 + H_2$ $V \equiv 0$, т. е. на этой стадии процесса соударения в некоторой окрестности оси симметрии поры не образуются.

Рассматривая поля значений величины V в последующие моменты времени, можно видеть, что точка, в которой V принимает максимальное значение, «перемещается» в направлении оси симметрии. При $t=1.105$ максимальное значение $V=0.0355$ достигается в точке, лежащей на оси симметрии и имеющей координаты $r=0, z=0.428$. Поведение линий уровня $V = \text{const}$ при $t=1.105$ показано на фиг. 4; здесь линиям 1–5 соответствуют значения $V=0.03, 0.02, 0.01, 0.0035, 0.001$. По этой фигуре видно, что при фиксированных значениях t и z величина V как функция координаты r монотонно убывает при увеличении r . Рассматривая зависимость V от координаты z при фиксированных значениях t и r , можно видеть, что функция $V(z)$ в зависимости от значения r имеет либо один, либо два локальных максимума. Принимая во внимание тот факт, что величина удельного объема микропор является мерой накопления микродефектов, наличие двух локальных максимумов у функции $V(z)$ с точки зрения откольных явлений можно интерпретировать как возможность множественного (двойного) откола.

При расчетах $R_1=1, R_1/R_2=2/3, H_1=0.143, H_2=0.5$. В этом случае оказывается, что в момент времени $t=0.857$ на отрезке AB с координатами граничных точек $r_A=0, z_A=0.5$ и $r_B=0.333, z_B=0.5$ величина V принимает одно и то же значение $V=2 \cdot 10^{-4}$, а вне полосы $0.464 \leq z \leq 0.536$, заключающей отрезок AB , $V=0$. В последующие моменты времени величина V имеет локальный максимум, который быстро смещается по направлению оси симметрии и при $t=0.981$ максимальное значение $V=0.0331$ достигается в точке с координатами $r=0, z=0.474$. Рассматривая зависимость величины V от координаты z при фиксированном значении r , можно видеть, что при $r=0$ кривая $V(z)$ имеет два локальных максимума. Аналогично ведут себя кривые $V(z)$ и при r , меньших некоторого значения r_0 , а при $r > r_0$ кривые $V(z)$ имеют только один локальный максимум, совпадающий с глобальным максимумом. Для иллюстрации указанных результатов на фиг. 5 показано поведение линий уровня $V = \text{const}$ при $t=0.082$; здесь линиям 1–6 соответствуют значения $V=0.031, 0.02, 0.011, 0.009, 0.002, 0.0001$. По этой фигуре видно, что при $r < 0.107$ зависимость $V(z)$ имеет два локальных максимума. Следовательно, как и в случае соударения пластин

с одинаковыми радиусами, этот результат можно интерпретировать как возможность множественного (двойного) откола.

Интересно сопоставить поля значений величины V при различных значениях отношения $m = R_1/R_2$. Расчеты показывают, что при $t = 0.857$ и $m = 2/3$ как максимальные значения величин $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\varphi$ и p , так и максимальное значение V оказываются больше, чем при $m = 1$. Однако в последующие моменты времени максимальное значение V при соударении пластин с одинаковыми радиусами становится больше, чем при соударении пластин с отношением $m = 2/3$. Принимая во внимание тот факт, что величина V является мерой накопления дефектов, становится ясно, что время оказывается существенным фактором в процессе микроразрушения. Далее, сравнивая максимальные значения величины V на протяжении всего процесса соударения в зависимости от величины отношения m , можно видеть, что чем больше отношение m , тем больше максимальное значение V и тем больше площадь области $G' \subset G$, в которой $V = 0$.

Выше была рассмотрена задача соударения двух пластин, в которой релаксационные свойства среды не учитывались. Естественно возникает вопрос, какое влияние оказывает процесс релаксации на распределение напряжений и на процесс накопления микропор.

Как указывалось выше, релаксационные свойства среды определяются зависимостью времени релаксации τ_0 от параметров состояния. В данной работе, следуя [10], τ_0 определяется следующим образом:

$$\tau_0 = \begin{cases} \tau^*, & \sqrt{J_2} > \sigma^* \\ \infty, & \sqrt{J_2} \leq \sigma^* \end{cases} \quad (4.2)$$

где J_2 – второй инвариант девиатора напряжений, τ^*, σ^* – постоянные.

В [10] отмечается, что среда, в которой зависимость определяется формулой (5.1), обладает всеми основными свойствами упругопластического материала, подчиняющегося условию пластичности Мизеса. В расчетах величина σ^* принималась равной 2.07, 6.2, 12.4×10^8 Н/м, а значение $\tau^* = 10^{-5}$ с [14]. Рассмотрим вначале влияние релаксационных свойств среды на поля напряжений ($V \equiv 0$). Опишем отличительные черты полей напряжений в среде с релаксацией на примере компоненты σ_z . Поведение линий уровня $\sigma_z = \text{const}$ в момент времени $t = 0.734$ показано на фиг. 6, здесь линиям 2–7 соответствуют значения $\sigma_z = 0.0109, 0.0085, 0.0065, 0, -0.0015$. Для сравнения на фиг. 7 изображены линии уровня $\sigma_z = \text{const}$ при $t = 0.734$, полученные

из решения задачи соударения, когда релаксационными свойствами пренебрегалось. Линиям 1–8 соответствуют значения $\sigma_z = 0.0144, 0.01, 0.0085, 0.0065, 0.004, 0, -0.0015, -0.003$. Сравнение полей напряжений показывает, что в каждой точке области G значение σ_z в среде с релаксацией напряжений оказывается меньше. В окрестности оси симметрии максимальные значения отличаются приблизительно на 10 %, а в области, прилегающей к боковой поверхности пластин, максимальные значения отличаются незначительно – менее 1 %. Результаты расчетов показывают, что указанные выше отличия полей σ_z сохраняются и в последующие моменты времени.

Проанализируем процесс накопления микропор. Выше отмечалось, что в среде с релаксацией напряжений давление в стадии растяжения меньше, чем в том случае, когда релаксация напряжений не учитывается. Из этого следует ожидать, что аналогично максимальные значения величины V в среде с релаксацией напряжений будут меньше. Это подтверждается представленными результатами расчетов

t	0.857	0.981	1.106
V_p	0.0002	0.0156	0.0123
V_e	0.0002	0.0331	0.022

Здесь указаны максимальные значения удельного объема микропор в среде с релаксацией напряжений – V_p , в упругой¹ среде – V_e в соответствующие моменты времени t . Видно, что при $t = 0.981$ максимальное значение V в упругой среде в 2.1 раза больше, чем в среде с релаксацией напряжений, тогда как при $t = 0.857$ максимальные значения V были одинаковы.

Влияние релаксационных свойств среды на процесс накопления микропор можно также проиллюстрировать зависимостями величины V от r при фиксированных значениях z , представленными на фиг. 8 для упругой среды, и на фиг. 9 для среды с релаксацией напряжений. На этих фигурах кривые 1–3 соответствуют $z = 0.5, 0.465, 0.42$.

Из сравнения фигур видно, что при $z = 0.5$ кривая $V(r)$ на фиг. 8 расположена значительно выше соответствующей кривой $V(r)$ на фиг. 9, а максимальное значение $V(r)$ на фиг. 8 приблизительно в два раза больше. В то же время максимальные значения зависимостей $V(r)$, представлен-

¹ Здесь и ниже под термином упругая среда понимается рассмотренная модель, в которой не учитываются релаксационные свойства среды ($\tau_0 = \infty$).

ных на фиг. 9, приблизительно на 25 % меньше при $z = 0.465$ и на 30 % меньше при $z = 0.42$. Указанные закономерности нетрудно понять, если вспомнить, что в стадии растяжения максимальные значения давления p (по r и z) расположены вблизи плоскости $z = 0.5$, а влияние релаксационных свойств на поля напряжений более всего проявляется также вблизи плоскости $z = 0.5$. Тогда очевидно, что зависимости $V(r)$ в среде с релаксацией напряжений будут более всего отличаться от аналогичных зависимостей в упругой среде при $z = 0.5$.

Сравним поля значений величины V в упругой среде и в среде с релаксацией напряжений. На фиг. 10 показано поведение линий уровня $V = \text{const}$ в момент времени $t = 1.106$ в среде с релаксацией напряжений. Здесь линиям 2–7 соответствуют значения $V = 0.011, 0.009, 0.006, 0.0022, 0.001, 0.0001$.

Поведение линий уровня $V = \text{const}$ в этот же момент времени в упругой среде показано на фиг. 11; здесь линиям 1–5 соответствуют значения $V = 0.015, 0.011, 0.009, 0.006, 0, -0.0022$. Сопоставление этих фигур показывает, что релаксационные свойства среды оказывают значительное влияние на процесс накопления микропор: во-первых, в среде с релаксацией напряжений диаметр области G'_1 , в которой $V = 0$, примерно в три раза меньше, чем диаметр соответствующей области G'_2 в упругой среде; во-вторых, численное значение величины V в каждой точке области G'_1 приблизительно в три раза меньше, чем значение V в соответствующей точке области G'_2 . Рассматривая этот результат с точки зрения откольных явлений, можно сделать вывод о том, что скорости соударения пластин, при которых происходит образование разрывов сплошности, будут различными для упругой среды и среды с релаксацией напряжений, причем в среде с релаксацией напряжений необходимая для этого минимальная скорость будет больше.

Литература

1. Hopkins B. A method of measuring the pressure produced in detonation of high explosives or by the impact of bullets // Proc. Roy. Soc. Ser. A. London. 1914, v. 213. P. 437.
2. Rinehart John S., John Pearson. Behavior of metals under impulsive loads. Cleveland: American Society for Metals, 1954. 256 p. = Райнхарт Дж. С.,

- Пирсон Дж. Поведение металлов при импульсивных нагрузках. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 151 с.
3. Skidmore I. C. An introduction to shock waves in solids // Appl. Mater. Res., V. 4, No. 3, 1965. P. 131.
 4. Breed B. R., Mader C. L., Veanable D. Technique for the determination of dynamic tensile-strength characteristics // J. Appl. Phys., 1967. V. 38, No. 8. P. 3271.
 5. Barbee T. W., Seaman L., Crewdson R., Curran D. Dynamic fracture criteria for ductile and brittle metals // J. Mater., 1972. V. 7, No. 3. P. 393.
 6. Curran D., Shockey D. A., Seaman L. Dynamic fracture criteria for a polycarbonate // J. Appl. Phys., 1973. V. 44, No. 9. P. 4025.
 7. Seaman L., Curran D., Shockey D. A. Computational models for ductile and brittle fracture // J. Appl. Phys., 1976. V. 47, No. 11. P. 4814.
 8. Глушко А. И. Исследование откола как процесса образования микропор // Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5. С. 132–140.
 9. Годунов С. К., Роменский Е. И. Нестационарные уравнения нелинейной теории упругости в эйлеровых координатах // ПМТФ, 1972, № 6. С. 124–144.
 10. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 304 с.
 11. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 225 с.
 12. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1973. 239 с.
 13. Годунов С. К., Козин Н. С., Роменский Е. И. Уравнение состояния упругой энергии металлов при нешаровом тензоре деформаций // ПМТФ, 1974, № 2. С. 123–128.
 14. Годунов С. К., Демчук А. Ф., Козин Н. С., Мали В. И. Интерполяционные формулы зависимости максвелловской вязкости некоторых металлов от интенсивности касательных напряжений и температур // ПМТФ, 1974, № 4. С. 114–118.

Комментарии

1. Статья «Численное решение задачи соударения цилиндрических пластин с учетом накопления микропор» опубликована в журнале «Известия АН СССР. Механика твердого тела», № 4, 1981. С. 104–112; поступила в редакцию 18.6.1979. Автор – А. И. Глушко.

2. На момент написания статьи в научной литературе господствовало представление о том, что малое, порядка 5 %, накопление микроповреждений в материале не оказывает существенного влияния на его напряженно-деформированное состояние. Тем не менее, при оценке проч-

ности конкретных изделий накопление повреждений все-таки учитывалось с помощью так называемых временных критериев разрушения. Суть этих критериев сводилась к вычислению интеграла по времени от некоторой эмпирически определенной функции. Считалось, что разрушение наступает в момент, когда интеграл достигает значения так называемого предела прочности.

Интерес к изучению моделей, в которых учитывается влияние накопления повреждений на напряженно-деформированное состояние материала, возник после того как А. Mielke и V. I. Levitas {1} предложили энергетическую формулировку определяющих соотношений и ввели понятие энергетического решения квазистатической задачи об упругопластическом деформировании твердых тел. Вслед за этим появилось довольно много работ, в которых изучались модели, где определяющими параметрами были тензор упругих деформаций и скалярный параметр повреждаемости (см., например, работу Dal Maso {2} и последующие работы этого автора).

{1} Mielke A., Theil F., Levitas V. I. A variational formulation of rate-independent phase transformations using an extremum principle. Arch. Rational Mech. Anal., 2002. V. 162: P. 137–177.

{2} Dal Maso G., DeSimone A., Mora M. G. Quasistatic evolution problems for linearly elastic–perfectly plastic materials. Arch. Rational Mech. Anal., 2006. V. 180: P. 237–291.

Глава 3. Дифракция нестационарной поперечной волны на цилиндрической полости

Вопросы, связанные с дифракцией поперечных волн, изучались в [1–8]. Дифракция стационарных упругих волн на гладких цилиндрах рассмотрена в [1]. Плоские задачи, связанные с взаимодействием стационарной волны сдвига как с единичным включением, так и с системой периодически расположенных цилиндрических включений и полостей, исследовались в [2–6]. Задача о дифракции нестационарной поперечной волны на цилиндрической полости, свободной от напряжений, решалась в [7, 8].

1. На цилиндрическую полость, находящуюся в безграничной упругой среде, падает поперечная плоская волна. Требуется определить поле напряжений около полости и движение ее стенок. Задача сводится к отысканию решения уравнений плоской динамической теории упругости с начальным условием, задаваемым падающей волной, и граничными условиями на полости. Пусть плотность среды $\rho_0 = 1$, скорость продольных и поперечных волн $a = \sqrt{\lambda + 2\mu}$, $b = \sqrt{\mu}$, радиус полости r_0 , λ, μ – параметры Ламе.

Введем безразмерные величины $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} / (\lambda + 2\mu)$, $u_i = u'_i / a$, $r = r' / r_0$, $t = t' a / r_0$, где σ'_{ij} – компоненты тензора напряжений, u' – компоненты вектора скорости, t' и r' – размерные время и радиус. Далее в системе единиц примем $a = 1$ и будем использовать следующие обозначения: $\sigma = \sigma_{rr}$, $\tau = \sigma_{r\theta}$, $s = \sigma_{\theta\theta}$, $u = u_r$, $v = u_\theta$. Тогда система уравнений относительно напряжений и скоростей примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial \theta} + \frac{\sigma - s}{r}, & \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial s}{\partial \theta} + \frac{2\tau}{r}, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{(1 - 2\mu)}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right), & \frac{\partial s}{\partial t} &= (1 - 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right), \\ & & \frac{\partial \tau}{\partial t} &= \mu \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Решение задачи о дифракции волны определяется начальными и граничными условиями. Начальное условие состоит в том, что при $t = 0$ напряжения и скорости совпадают с напряжениями и скоростями, которые задаются падающей поперечной волной формы $f(\xi)$. При этом за $t = 0$ принимается момент, когда фронт волны касается полости (фиг. 1).

Будем считать, что поверхность полости свободна от напряжений. Тогда граничные условия при $r = 1$ будут иметь вид $\sigma = 0, \tau = 0$.

Пользуясь линейностью задачи, будем искать решение системы (1.1) в виде $\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_1$, где \mathbf{W}_0 – вектор с компонентами σ, s, τ, u, v , задаваемыми падающей волной. Для \mathbf{W}_1 получим задачу с нулевыми начальными и ненулевыми граничными условиями. При $r = 1$ напряжения от падающей волны, вычисленные в отсутствие полости, выражаются формулами

$$\sigma_0 = -f(\xi) \sin 2\theta, \quad \tau_0 = -f(\xi) \cos 2\theta, \quad \xi = t\sqrt{\mu} + \cos \theta - 1 \quad (1.2)$$

Поэтому для \mathbf{W}_1 получим следующие условия на границе $r = 1$:

$$\sigma_1 = f(\xi) \sin 2\theta, \quad \tau_1 = f(\xi) \cos 2\theta \quad (1.3)$$

Для построения численного решения необходимо ограничить расчетную область некоторой границей, на которой нужно поставить дополнительные условия. Выберем эту границу в виде окружности $r = R \gg 1$, а условие на ней возьмем исходя из соображений, применяемых в [9–11]. Будем считать, что вблизи $r = R$ продольное и поперечное движение локально описывается плоскими волнами, распространяющимися по радиусу. Поэтому при $r = R$ положим

$$\sigma_1 + u_1 = 0, \quad \tau_1 + \sqrt{\mu} v_1 = 0 \quad (1.4)$$

Построив решение \mathbf{W}_1 для $t > t_0$ и сложив его с решением, задаваемым падающей волной, найдем решение задачи о дифракции поперечной волны на цилиндрической полости, свободной от напряжений (ниже единица в индексе у соответствующих величин опускается).

2. Решение строилось при помощи метода конечных разностей.

Расчетная область в полярных координатах представляет собой прямоугольник $1 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi$, который разбивается на ячейки прямыми $\theta_j = \Delta\theta \times j, r_i = (1 + \Delta\theta)^i$.

Переменный шаг h_i по координате r берется таким, чтобы $h_i = r_i \theta$. При этом разбиении форма ячеек близка к квадратной во всей расчетной области. Напряжения σ, s, τ определены в узлах сетки, а скорости u, v – в центрах ячеек. Вводится расщепление по времени; при этом функции u, v определены для $t = \Delta t(k - 0,5)$, а σ, s, τ – для $t = \Delta t k$ ($k = 0, 1, \dots, L$).

Во внутренних точках используется схема типа пространственный крест. При этом уравнения для скоростей аппроксимируются со вторым

порядком точности по всем переменным, а в ошибку аппроксимации производных по r от напряжений войдет член $h_i - h_{i-1} \approx r_i \theta^2$. Применение переменного шага по r хотя и увеличивает ошибку аппроксимации, но позволяет уменьшить влияние границы $r = R$ и условий на ней на решение [6], а также делает размеры расчетной области удовлетворительными с точки зрения объема оперативной памяти ЭВМ. Граница расчетной области проходит по углам сетки, поэтому граничные условия должны формулироваться для величин σ, s, τ .

При $r=1$ величины σ и τ определяются из условий (1.3). При $r=R$ – из условий (1.4), скорости экстраполируются на границу $r=R$ при $t = (k - 0.5)\Delta t$. Если $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, имеют место условия антисимметрии. В силу того что падающая волна поперечная, при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ выполняется условие $\sigma = 0, s = 0, \partial\tau/\partial\theta = 0$.

Для определения s при $r=1, R$ использовались бихарактеристические соотношения для системы (1.1) [11]:

$$\frac{\partial s}{\partial t} - (1 - 2\mu) \frac{\partial \sigma}{\partial t} - 4\mu \frac{(1 - \mu)}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) = 0 \quad (2.1)$$

Чтобы гасить колебания разностного решения, возникающие при резких формах падающей волны и вызванные использованием схемы второго порядка точности, применяется сглаживание решения, аналогичное использованному в [11, 12].

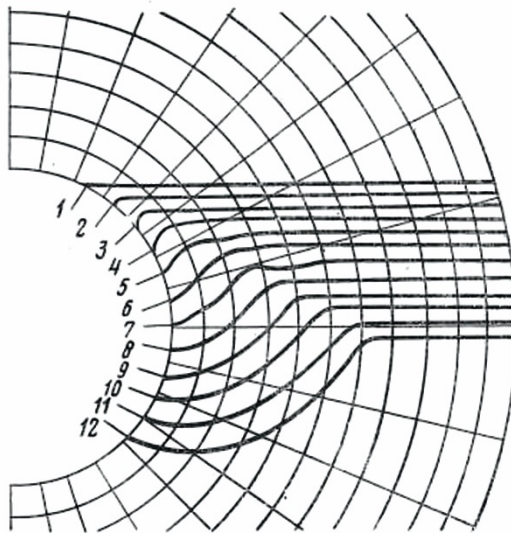
В одномерном приближении применяемое сглаживание имеет вид

$$f_j^{\Gamma} = \omega |f_{j+1}^- - f_j| f_{j+1} + f_j (1 - \omega |f_{j+1}^- - f_j| - \omega |f_j^- - f_{j-1}|) + \omega |f_j^- - f_{j-1}| f_{j-1} \quad (2.2)$$

Большое значение коэффициента сглаживания ω приводит к сильному заглаживанию решения, малое – к появлению сильных осцилляций скоростей u и v . В результате численных экспериментов было выбрано значение $\omega = 0.075$. Для уменьшения сглаживания решения при больших значениях времени t сглаживание применялось при $t < 4$ на каждом втором слое по времени, а при $t > 4$ – на каждом десятом. Форма падающей волны принималась в виде «ступеньки», что позволяло получить методом установления решение соответствующей статической задачи.

3. Поскольку падающая волна поперечная, это приводит к интересному явлению распространения возмущения в окрестности полости впереди падающей волны. При продвижении падающей волны локальный угол падения волны на полость увеличивается и при некотором

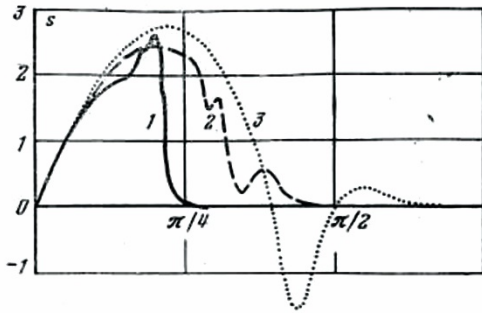
t_* , таком, что $\cos(\arcsin \sqrt{\mu}) = 1 - t_* \sqrt{\mu}$, имеет место полное внутреннее отражение и вблизи полости впереди фронта падающей волны появляется возмущение. Для случая стационарных колебаний возмущения такого типа, называемые волнами соскальзывания, были изучены в [13, 14]. В рассматриваемом нестационарном случае аналитически описать распространение этого возмущения не удастся из-за сложности задачи. Поэтому был произведен подробный расчет на мелкой сетке, чтобы определить скорости и напряжения в области, занятой этим возмущением.



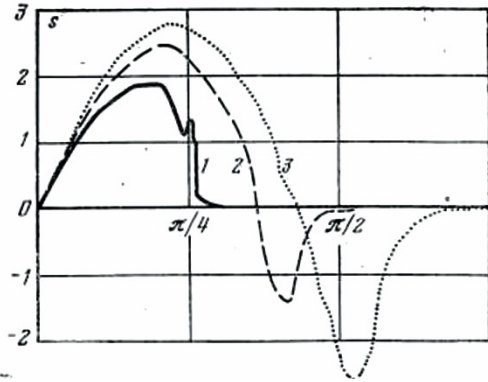
Фиг. 1

На фиг. 1–3 представлены результаты расчетов на сетке 34×91 ($\Delta\theta \approx 0.03, \Delta r_0 = 0.03$). Сглаживание отсутствовало. На фиг. 1 изображены последовательные положения фронта возмущения в различные моменты времени ($t\sqrt{\mu} = 0.09 - 0.13$). За фронт принимается линия уровня напряжения $s = 0.01$. Результат можно интерпретировать как сложение продольных волн, распространяющихся по касательным из соответствующих точек на полости.

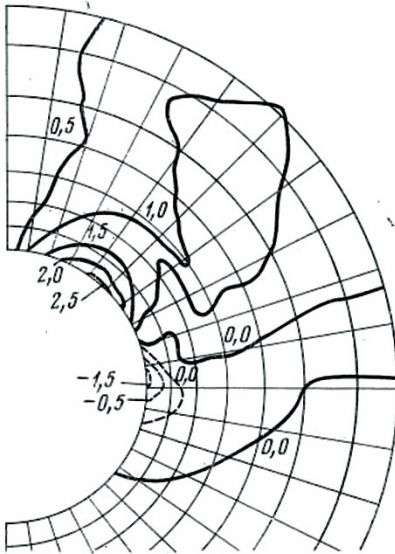
3. Дифракция нестационарной поперечной волны на цилиндрической полости



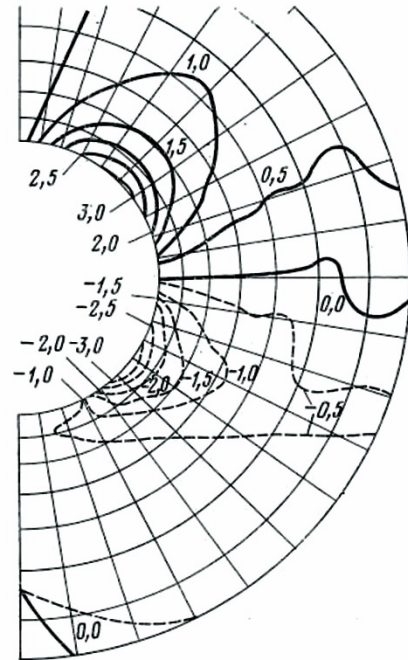
Фиг. 2



Фиг. 3

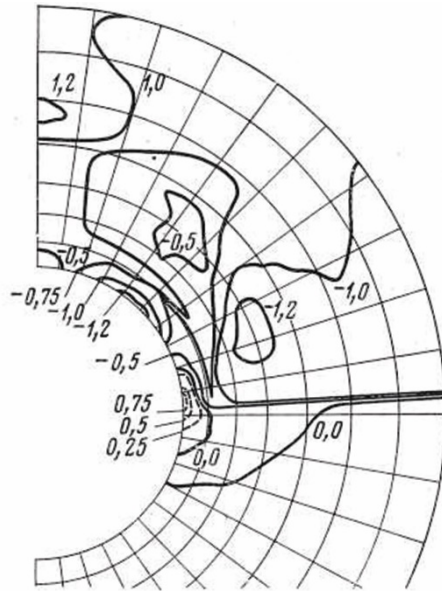


Фиг. 4

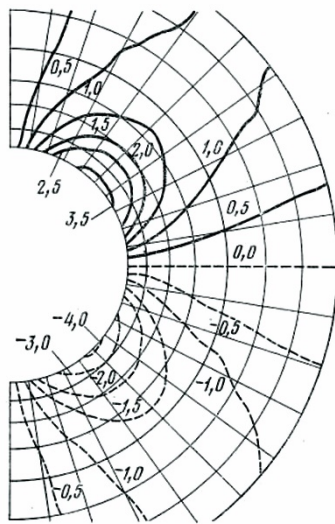


Фиг. 5

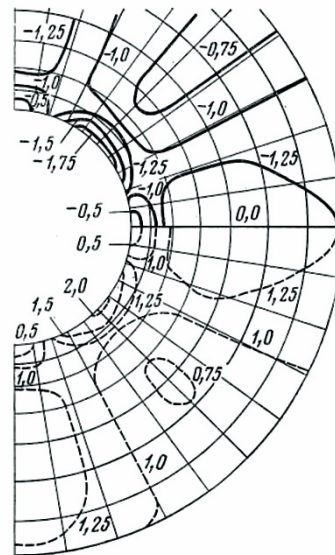
3. Дифракция нестационарной поперечной волны на цилиндрической полости



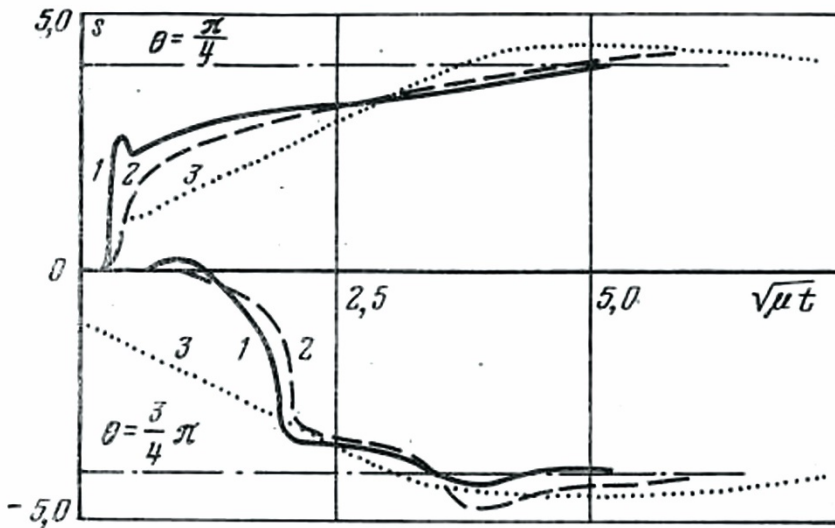
Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

Распределение кольцевого напряжения s на контуре в различные моменты времени показано на фиг. 2 ($\mu = 0.2$) и на фиг. 3 ($\mu = 0.4$). Кривые 1, 2, 3 относятся к времени $t\sqrt{\mu} = 0.28, 0.66, 1.04$. На кривых 2, 3 видны возмущения в продольном предвестнике. Отметим, что напряжения s в области возмущения достигают больших значений и меняют знак в зависимости от значений параметра μ .

Ниже анализируются компонента тензора напряжения s и главное максимальное касательное напряжение $\tau_{\max} = 1/2(\sigma - s) \left[1 + 4\tau^2 / (\sigma - s)^2 \right]^{1/2}$. Как показывают расчеты, эти величины принимают большие значения по сравнению с радиальным напряжением σ . На фиг. 4–8 представлены изолинии функций $s(r, \theta, t)$ и $\tau_{\max}(r, \theta, t)$ для различных моментов времени. Вычисления проводились для $\mu = 0.3$ на сетке $(r, \theta) 45 \times 61$. На фигурах показана область $r \leq 2.8$, где имеется наибольшая концентрация напряжений.

Рассмотрим поле кольцевого напряжения $s(r, \theta, t)$. Оно дает качественную информацию о возможных зонах разрушения с образованием радиальных трещин. На фиг. 4 ($t = 1.81$) видно положение фронта поперечной

волны, при этом возмущения в продольном предвестнике достигли точек контура $\theta = 130^\circ$. Зона максимальных напряжений ($s = 2.5$) мала и локализована около свободной границы ($\theta = 34 \div 50^\circ$). Зона повышенной концентрации ($s > 1$) довольно обширна и занимает область до $r = 2.8$ ($\theta = 10 \div 66^\circ$). Вместе с тем появляется зона сжимающих напряжений ($\theta = 75 \div 96^\circ$), которая доходит до $r = 1.25$. Минимальная величина $s = -1.5$ вблизи $\theta = 90^\circ$.

Фиг. 5 соответствует $t = 3.99$. В верхней части процесс близок к установившемуся, нижняя – характерна для нестационарного процесса. Зона сжимающих напряжений значительна и занимает пространство от $\theta = \pi/2$ до $\theta = \pi$. Максимальное и минимальное напряжение $|s| = 3$ и зоны их равны по размерам и локализованы в углах, близких к стационарным распределениям $\theta = \pi/4, \theta = 3\pi/4$. Изолинии повышенной концентрации для растяжения имеют вид, близкий к стационарному. Зона минимальных напряжений $s < -1$ значительна и занимает $\theta = 96 \div 150^\circ$ и $r \approx 1.6$. Предвестник имеет, главным образом, сжимающие напряжения.

Поля изолинии τ_{\max} дают качественную информацию о возможных зонах разрушения путем сдвига. Наименьшие значения $\tau_{\max} = -1.2$ на фиг. 6 $t = 1,81$ локализованы в следующих областях: $\theta = 0 \div 6^\circ, r = 2.1; \theta = 31 \div 47^\circ, r \approx 1; \theta = 62 \div 76^\circ, r = 1.4 \div 1.7$. Наибольшие значения $\tau_{\max} = 0.75$ при этом расположены в зоне $\theta = \pi/2, r = 1$. В продольном предвестнике τ_{\max} положительные.

Применяемая разностная схема позволяет методом установления получить решение соответствующей статической задачи. В процессе установления можно выявить отличие в напряженном состоянии при динамическом и статическом нагружениях. Изолинии функций s и τ_{\max} при $t = 9,12$ показаны на фиг. 7, 8, соответственно. Распределение напряжения s на контуре для статической задачи с заданным касательным напряжением τ_0 на бесконечности имеет вид $s = 4\tau_0 \sin 2\theta$. Максимальные значения $|s|$ принимает при $\theta = \pi/4, \theta = 3\pi/4$. При динамическом нагружении, как показывают расчеты, s принимает максимальные значения в тех же точках, при этом сами значения несколько превышают статические.

На фиг. 9 приведены результаты расчетов для s как функции $t\sqrt{\mu}$ в точках контура при $\theta = \pi/4$ и $\theta = 3\pi/4$. Кривые 1, 2 соответствуют $\mu = 0.1, 0.4$. Максимальное значение $|s|$ слабо зависит от μ . Так, разница между $|s|_{\max}(\mu = 0.1)$ и $|s|_{\max}(\mu = 0.4)$ равна примерно 6 %. Видно, что при $t\sqrt{\mu} > 6$ численное решение выходит на статическое. Кривая 3 – результат [7], в которой решение строится методом разделения переменных. Сходимость полученных рядов, как указывается в этой работе, весьма медленная для $t\sqrt{\mu} < 2$, поэтому результат достоверно описывает состояние, предшествующее статическому. Для $t\sqrt{\mu} < 2$ малое число удерживаемых членов ряда приводит к значительным ошибкам. Так, в [7] приведен результат вычисления функции $s(t)$ при $\theta = 0^\circ$. Дано вычисленное максимальное значение, равное $0.119\tau_0$, хотя из точного выражения, полученного в [8], следует, что при $\theta = 0^\circ s(t) = 0$.

Сопоставление результатов с данными, полученными в [11], свидетельствует о большей динамичности процесса дифракции поперечной волны по сравнению с продольной. Так, отношение максимальных значений динамического и статического напряжения s равно 1.15 при дифракции поперечной волны и 1.02 – при дифракции продольной волны. Время выхода решения на квазистатический режим, выраженное во временах пробега волн по радиусу полости, для поперечной волны составляет $t = 4 - 5$, для продольной волны $t = 7 - 8$.

Литература

1. Яворская И. М. Дифракция плоских стационарных упругих волн на гладких выпуклых цилиндрах // ПММ, 1965, т. 29, № 3. С. 493–508.
2. Maw C. C., Mente L. J. Dynamic stresses and displacement around cylindrical discontinuities due to plane harmonic shear waves // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech, 1963. V. 30, № 4. P. 598–604.
3. Головчан В. Т. Дифракция волны сдвига на бесконечном ряде цилиндрических полостей // Прикл. механика, 1971. Т. 7, № 3. С. 41–46.
4. Гузь А. И., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. Киев: Наук. думка, 1978. 307 с.

5. Головчан В. Т. Дифракція пружної поперечної хвилі на еліптичних циліндрах в напі впросторі // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1971. № 3. С. 246–249.
6. Гузь А. Н., Головчан В. Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. Киев: Наук. думка, 1972. 254 с.
7. Baron M. L., Matthews A. T. Diffraction of a shear wave by a cylindrical cavity in an elastic medium // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1962. V. 29, № 1. P. 205–207.
8. Pao Y.-H., Mow C. C. Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations. N. Y.-London: Hieger, 1973. 693 p.
9. Скобеев А. М. Взаимодействие упругой волны с пластинкой // ПМТФ, 1972. № 2. С. 74–85.
10. Скобеев А. М. Дифракция упругой волны на диске // ПМТФ. 1972. № 3. С. 139–150.
11. Ковшов А. Н. О дифракции нестационарной упругой волны на цилиндрической полости // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 4. С. 115–121.
12. Ляхов В. Н. Сглаживание и искусственная вязкость при расчетах двумерных нестационарных течений с разрывами // Численные методы в механике сплошной среды. Т. 5. Вып. 3. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. 1974. С. 69–74.
13. Бабиш В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
14. Викторов И. А. Поверхностные волны на цилиндрических поверхностях кристаллов // Акуст. ж. 1974. № 2. С. 199–206.

Комментарии

1. Статья «О дифракции нестационарной поперечной волны на цилиндрической полости» опубликована в журнале «Известия АН СССР. Механика твердого тела», № 5, 1982. С. 104–112; поступила в редакцию 16.11.1981.

Авторы – А. Н. Ковшов и И. И. Нещеретов. Александр Николаевич Ковшов (1941–2002), старший научный сотрудник Института проблем механики АН СССР (затем – РАН), кандидат физико-математических наук, автор более пятидесяти работ по механике твердого деформируемого тела.

2. Термин «угол полного внутреннего отражения» активно используется в акустике и оптике. Так, в оптике, когда говорят о полном внутреннем отражении, речь идет о преломлении света из среды более оптически плотной в менее оптически плотную, например, из стекла в воздух. В теории упругости имеется две скорости распространения возмущений,

в работе рассматривается задача дифракции волны на цилиндре (а не преломления), так что говорить о полном внутреннем отражении можно только как об аналогии с ситуацией в оптике.

Пояснить факт образования возмущений впереди фронта поперечной волны можно из следующих соображений. Проследим за скоростью движения точки пересечения фронтом поперечной волны цилиндра. Очевидно, что вектор скорости движения этой точки будет касаться цилиндра, а по модулю равен $c_2/\sin(\beta)$. Здесь β – угол между нормалью к фронту и цилиндру, c_2 – скорость распространения поперечной волны. В начальный момент $\beta=0$ и скорость движения точки пересечения равна бесконечности. Затем β монотонно убывает, пока $\beta < \pi/2$. Поэтому, пока

$$c_2/\sin(\beta) > c_1$$

где c_1 – скорость распространения продольной волны, возмущение впереди фронта поперечной волны не образуется. Если же это неравенство нарушается, то в любой последующий момент времени область (в данном случае – конус) влияния продольной волны будет захватывать точки, лежащие перед фронтом поперечной волны. В этих точках возникнет возмущение, распространяющееся со скоростью продольных волн, то есть впереди фронта поперечной волны.

3. Публикация работы, численное решение которой продемонстрировало нетривиальное физическое явление – возникновение сверхзвукового предвестника, вызвала в свое время большой научный интерес.

Глава 4. Дифракция продольной волны на цилиндрической полости при больших временах

Задача дифракции плоской продольной волны на цилиндрической полости, расположенной в упругой среде, рассматривалась ранее в работах [1–5]. Аналитическое решение этой задачи в [1], [2] строится методом Фурье разложением в ряды по собственным функциям, которые вблизи прифронтной области и в теневой области сходятся очень медленно. Это послужило одним из стимулов для применения численных методов [3–5] в таких задачах.

Интерес к задаче дифракции со стороны специалистов по численным методам связан и с тем, что при решении могут быть исследованы такие вопросы, как точность, устойчивость, вязкость, дисперсия разностных схем, выход нестационарного решения на статическое и т. д. Возникают также вопросы, связанные с реализацией численной схемы при расчете в неограниченной области.

При больших временах возмущения от дифракционной волны будут распространяться на большие расстояния. Если расчет ведется на неподвижной сетке в фиксированной области, то какие бы граничные условия ни ставились, они будут приводить к появлению отраженных волн. С другой стороны, можно рассматривать движения среды в подвижной системе координат такой, что внешняя граница расчетной области начинает расширяться со скоростью продольных волн, как только возмущения от волны дифракции впервые достигнут хотя бы одной граничной точки. Тогда на подвижной границе все величины будут совпадать с соответствующими в падающей волне. Такой прием, казалось бы, позволяет избавиться от волн, отраженных от внешней границы расчетной области. Однако в этом случае ячейки со временем будут сильно деформироваться, что неизбежно скажется на аппроксимационных свойствах схемы, в частности, приведет к увеличению аппроксимационной вязкости. Представляет интерес сравнение этих двух приемов и выяснение, при каких временах они дают близкие результаты, а при каких – значительное расхождение. Известно, что при растяжении безграничного пространства с цилиндрической полостью силами, действующими на бесконечности вдоль двух взаимно перпендикулярных направлений, на границе полости возникает концентрация напряжений. Естественно ожидать, что при больших временах решение задачи дифракции будет приближаться к решению соответствующей статической задачи. Суждение о том, насколько точно численное решение динамической задачи приближает решение статической, естественнее всего

сделать, если сравнить значения коэффициентов концентрации напряжений; отклонения скоростей от нуля при этом должны быть минимальными. Интересно также выяснить, во сколько раз концентрация напряжений в динамической задаче превышает соответствующие значения в статической.

Заметим, что изучение решения задачи при больших временах имеет и практический интерес, например для исследования поведения упругих конструкций, расположенных в сплошной среде. Обычно в таких ситуациях периоды собственных колебаний конструкций не совпадают с характерным временем действия нагрузки. Поэтому для правильной оценки влияния дифракции приходится рассматривать времена, во много раз превышающие характерное время переходного процесса.

Расчеты, выполненные с помощью схемы «крест» [4], [5], схемы распада произвольного разрыва и схемы Лакса, показывают, что концентрация напряжений в динамической задаче меньше концентрации в статической примерно на 15 % в схеме типа «крест» и на 33 % в методе распада произвольного разрыва и в методе Лакса. Такое различие неудивительно, если принять во внимание большую аппроксимационную вязкость указанных методов. Метод Мак-Кормака [6] обладает значительно меньшей вязкостью, и естественно использовать его для более точного приближения статического решения решением задачи дифракции при больших временах.

1. Будем рассматривать движения линейно-упругой среды в цилиндрической системе координат r, φ, z . Обозначим через u_r, u_φ физические компоненты вектора скорости, $\varepsilon = \varepsilon_{rr}, \alpha = \varepsilon_{\varphi\varphi}, \beta = 2\varepsilon_{r\varphi}$ – компоненты тензора деформаций, t – время, a_1, a_2 – скорости продольных и поперечных волн соответственно, $\gamma = a_2/a_1, R_0$ – радиус полости. Введем переменные $r' = r/R_0, t' = a_1 t/R_0, u = u_r/a_1, v = u_\varphi/a_1$ и вектор-функцию $\mathbf{U} = (u, v, \varepsilon, \alpha, \beta)^T, T$ – символ операции транспонирования.

Запишем систему уравнений линейной теории упругости относительно скоростей и деформаций в системе координат r, φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \gamma^2 \frac{\partial \beta}{r \partial \varphi} + \lambda \frac{\partial \alpha}{\partial r} + 2\gamma^2 \frac{(\varepsilon - \alpha)}{r} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \gamma^2 \frac{\partial \beta}{\partial r} + \lambda \frac{\partial \varepsilon}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \alpha}{r \partial \varphi} + 2\gamma^2 \frac{\beta}{r} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial v}{r \partial \varphi} + \frac{u}{r}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial}{r \partial \varphi} - \frac{u}{r} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь штрихи для упрощения опущены, $\lambda = 1 - 2\gamma^2$.

Будем также рассматривать движения среды в подвижной системе координат ξ, θ, t , связанной с координатами r, φ формулами

$$\xi = (r-1)/(R(t)-1), \quad \theta \equiv \varphi$$

Здесь радиус внешней границы расчетной области $R = R(t)$ задается следующим образом

$$R(t) = \begin{cases} R_1, & \text{если } t < R_1 - 1, \\ t + 1, & \text{если } t \geq R_1 - 1, \end{cases} \quad R_1 = \text{const} \gg 1$$

Система уравнений движения в переменных ξ, θ, t , отличается от системы (1.1) тем, что в левой части дифференцирование по времени заменяется выражением

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \xi \frac{\partial}{\partial \xi}$$

Сформулируем теперь задачу дифракции плоской продольной волны на цилиндрической полости. Примем, что фронт такой волны ортогонален оси OX . Напомним, что в линейной теории упругости вектор упругого смещения \mathbf{w} в среде связан со скалярным Φ и векторным Ψ потенциалами представлением Ламе (см., например, [7]):

$$\mathbf{w} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \Psi$$

Для случая плоской продольной волны $\Psi \equiv 0$ компоненты вектора скорости таковы

$$u = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial r}, \quad v = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \varphi}, \quad (1.2)$$

а компоненты тензора деформации имеют соответствующий вид:

$$\varepsilon = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad \alpha = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right), \quad \beta = \frac{2}{r} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \quad (1.3)$$

Падающую волну будем задавать в виде ступени, т. е. потенциал волны $\Phi(x, t)$ определяется формулой

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} (x-1-t)^2, & \text{если } x-1-t > 0, \\ 0, & \text{если } x-1-t \leq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Задание потенциала Φ в виде (1.4) означает, что волна распространяется в отрицательном направлении оси X ; за фронтом волны тензор

напряжений постоянен и его компонента $\sigma_{xx} = 1$. На границе полости, свободной от напряжений,

$$\varepsilon + \lambda\alpha = 0, \quad \beta = 0 \quad (1.5)$$

Задача дифракции состоит в том, чтобы при $t > 0$ найти решение системы (1.1) в области $r \geq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, удовлетворяющее граничным условиям (1.5) на границе $r = 1 (\xi = 0)$, а при $t = 0$ компоненты скоростей и деформаций определяются по формулам (1.2), (1.3) с использованием (1.4). Если представить решение $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t, r, \varphi)$ системы (1.1) в виде $\mathbf{U} = \mathbf{U}_p + \mathbf{U}_d$, где индекс p соответствует падающей волне, то \mathbf{U}_d на бесконечности должно удовлетворять условиям излучения. Естественно, что численная реализация данной краевой задачи осуществляется в ограниченной расчетной области $1 \leq r \leq R_1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Поэтому условия излучения на бесконечности необходимо заменить другими условиями на внешней границе расчетной области $r = R_1$. В данной работе принимаются условия типа пропускания, ранее использованные в [5]:

$$\varepsilon - \varepsilon_p + \lambda(\alpha - \alpha_p) + u - u_p = 0, \quad v - v_p + \gamma(\beta - \beta_p) = 0 \quad (1.6)$$

Величины в падающей волне вычисляются при $r = R_1$. При расчете на границе расширяющейся сетки используется следующий факт: в каждый момент времени на $\xi = 1$ имеются возмущения только от падающей волны, т. е. сетка расширяется со скоростью продольных волн. Поэтому значения искомых величин при $\xi = 1$ должны быть равны соответствующим значениям этих величин в падающей волне, например, $u = u_p$ и т. д. При численном решении можно использовать симметрию задачи относительно оси OX . В этом случае на оси OX следует поставить граничные условия

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} = \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = v = \beta = 0$$

2. Численное решение поставленной задачи будем строить при помощи схемы второго порядка точности [6]. Используя \mathbf{U} , записываем систему в матричном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial r} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \varphi} + \mathbf{C} \mathbf{U} \quad (2.1)$$

На шаге «предиктор» уравнение (2.1) аппроксимируется разностным соотношением

$$\mathbf{U}' = \mathbf{U}_0 + \Delta \left[\mathbf{A} \frac{\mathbf{U}_0 - \mathbf{U}(t_0, r - \Delta r, \varphi)}{\Delta r} + \mathbf{B} \frac{\mathbf{U}_0 - \mathbf{U}(t_0, r, \varphi - \Delta \varphi)}{\Delta \varphi} + \mathbf{C} \mathbf{U}_0 \right]$$

Здесь $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}(t_0, r, \varphi)$, Δ – шаг по времени, $\Delta r, \Delta \varphi$ – шаг по r и по φ , соответственно.

На шаге «корректор» значение вектор-функции \mathbf{U} при $t = t_0 + \Delta$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{U}(t) = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}' + \Delta \left[\mathbf{A} \frac{\mathbf{U}'(t, r + \Delta r, \varphi) - \mathbf{U}'}{\Delta r} + \mathbf{B} \frac{\mathbf{U}'(t, r, \varphi + \Delta \varphi) - \mathbf{U}'}{\Delta \varphi} + \mathbf{C} \mathbf{U}' \right] \right\}$$

Для вычисления вектор-функции \mathbf{U} в граничных точках расчетной области используются граничные условия (1.5), (1.6) и соотношения на бихарактеристиках [8], которые для уравнений линейной теории упругости записываются в виде

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial}{\partial t} + ca_k \frac{\partial}{\partial r} \right) s_k + \frac{f_k}{b + c\Delta a_k} &= 0, \quad a_1 = 1, a_2 = \gamma, \quad k = 1, 2, \\ f_1 = \lambda c \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \gamma^2 \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} + 2\gamma^2 (\varepsilon - \alpha) + \lambda u, \quad s_1 &= u + \varepsilon + \lambda \alpha, \\ f_2 = \gamma c \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \lambda \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} + \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} + 2\gamma^2 \beta - \gamma v, \quad s_2 &= v + \gamma \beta \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $c = \pm 1$, причем знак $+(-)$ соответствует внутренней (внешней) границе расчетной области; $b = 1$ на внутренней границе, на внешней границе $b = R(t)$ для расширяющейся сетки и $b = R_1$ – для неподвижной. Используются также условия на линии тока.

На шаге «предиктор» соотношения (2.2) аппроксимируются следующим образом:

$$\partial s_k / \partial t - ca_k \partial s_k / \partial r \approx (s_k(t_0 + \Delta, r, \varphi) - s_k(t_0, r, \varphi)) / \Delta, \quad r. = r + ca_k \Delta$$

Для аппроксимации частных производных по φ в (2.2) вначале интерполируем все величины по r в точку $r.$ (см. фиг. 1, где e_r, e_φ – орты

цилиндрической системы координат), а затем вычисляем левые разности на шаге «предиктор»:

$$\frac{\partial s_k}{\partial \varphi} \approx \frac{s_k(t_0, r, \varphi) - s_k(t_0, r, \varphi - \Delta\varphi)}{\Delta\varphi}$$

и правые разности на шаге корректор:

$$\frac{\partial s'_k}{\partial \varphi} \approx \frac{s'_k(t, r, \varphi + \Delta\varphi) - s'_k(t, r, \varphi)}{\Delta\varphi}$$

На шаге корректор дифференцирование вдоль бихарактеристик аппроксимируем следующим образом:

$$\frac{\partial s_k}{\partial t} - ca_k \frac{\partial s_k}{\partial r} \approx \frac{s_k(t, r, \varphi) - [s_k(t_0, r, \varphi) - s'_k(t, r, \varphi)]/2}{\Delta}$$

Во внутренних точках расчетной области на шаге «предиктор» по обоим направлениям берутся левые разности, на шаге «корректор» – правые.

3. Перейдем к анализу численных результатов. Если специально не оговорено, то расчеты проводились на сетке $60 \times 61, R_1 = 1 + 2\pi$. Шаг по времени определялся с учетом формулы

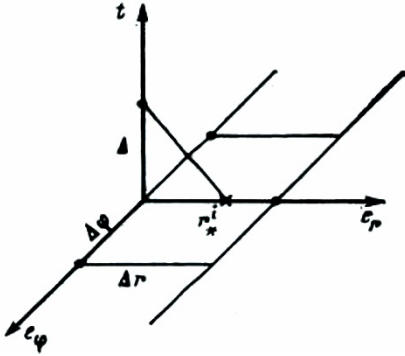
$$\Delta \leq q \frac{\Delta r \Delta \varphi}{\sqrt{\Delta r^2 + \Delta \varphi^2}}, \quad q \leq 1$$

где q – коэффициент Куранта. Для практических целей наибольший интерес представляет исследование тех зависимостей, которые можно наблюдать экспериментально на поверхности полости. Большой интерес представляют также распределение тангенциальных напряжений на контуре и их максимальные значения. Под коэффициентом концентрации для гладких контуров понимается отношение максимального тангенциального напряжения на контуре к приложенной нагрузке – для нашей задачи величина $\sigma_{\varphi\varphi} = \alpha + \lambda \varepsilon = \sigma$.

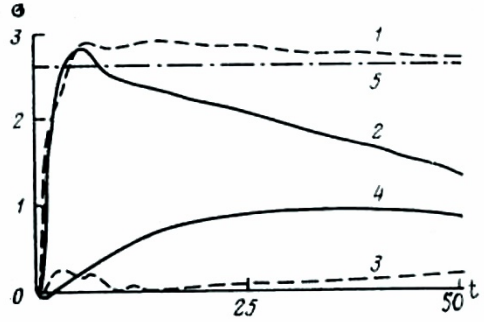
Далее представленные на фиг. 2–11 зависимости соответствуют точкам, лежащим на поверхности полости. На фиг. 2 показаны зависимости $\sigma(t)$. Первые две кривые соответствуют расчету с условием «пропускания» на внешней границе, вторые две – расчету на расширяющейся сетке.

4. Дифракция продольной волны на цилиндрической полости при больших временах

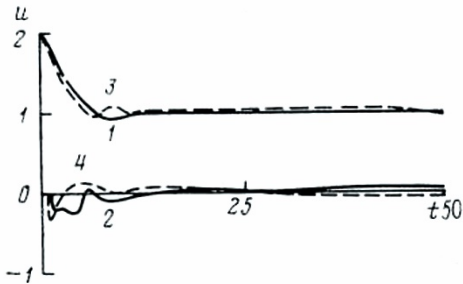
Кривые 1 и 3 показывают поведение $|\sigma(t)|$ в точке $\varphi = \pi/2$, кривые 2, 4 – поведение $\sigma(t)$ в точке $\varphi = 0$.



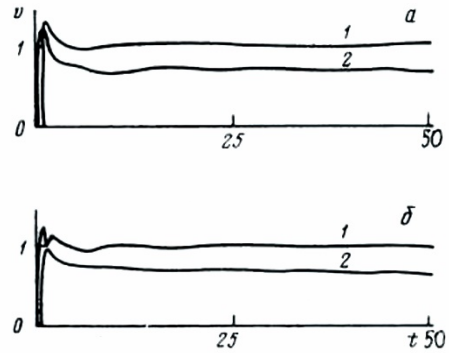
Фиг. 1



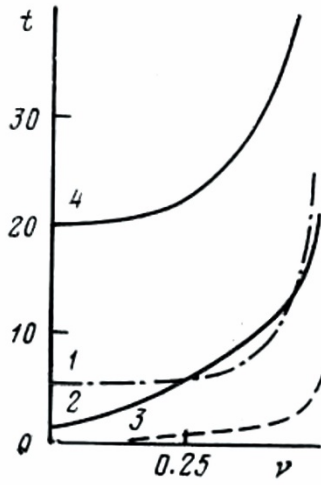
Фиг. 2



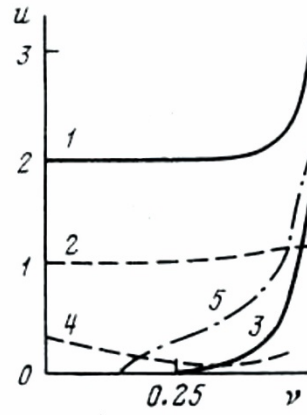
Фиг. 3



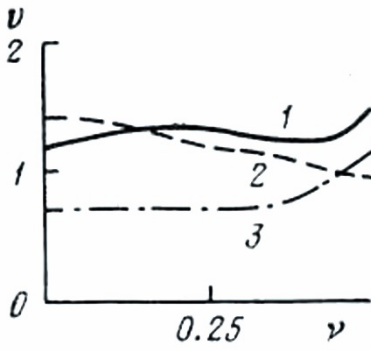
Фиг. 4



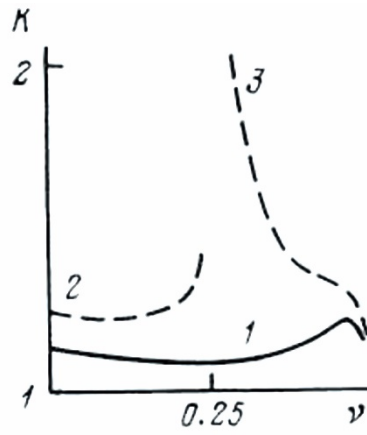
Фиг. 5



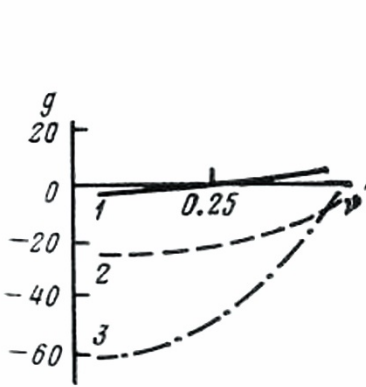
Фиг. 6



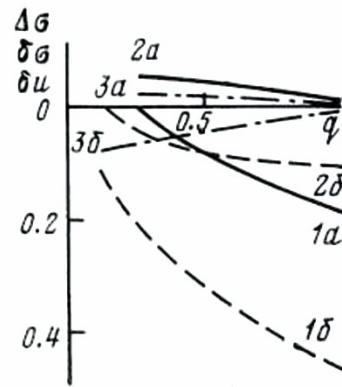
Фиг. 7



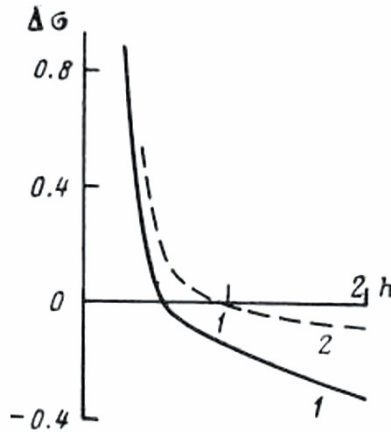
Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10



Фиг. 11

Штрихпунктирная прямая 5 – значение $|\sigma|$ при $\varphi = \pi/2$ в статической задаче. Хорошо видно, что расчет на фиксированной сетке с условием пропускания на внешней границе при $t \approx 50$ дает практически то же самое значение σ , что и в статическом решении. Фиг. 3 иллюстрирует зависимости $u(t)$.

Кривые 1,2 соответствуют расчету с условием пропускания, 3, 4 – расчету на расширяющейся сетке. Здесь кривые 1, 3 – зависимости $|u|$ от t при $\varphi = 0$, кривые 2, 4 – значения $u(t)$ при $\varphi = \pi/2$. Зависимости $v(t)$ для расчета с условием пропускания показаны на фиг. 4, а для расширяющейся сетки – на фиг. 4, б. Кривая 1 соответствует $\varphi = \pi/4$, 2 соответствует $\varphi = \pi/2$. Сравнивая результаты, полученные двумя способами, легко видеть, что они дают близкие значения. Из фиг. 2–4 можно сделать такой вывод: для расчета задачи дифракции на больших интервалах времени предпочтительнее использовать фиксированные сетки с условиями пропускания на внешней границе.

Представленные ниже результаты расчетов, если особо не оговорено, получены на фиксированной сетке.

Обратимся к фиг. 5–9. Здесь по оси абсцисс отложены значения коэффициента Пуассона, который в упругости принимает значения на полуинтервале $[0,0.5)$. Как известно, значение $\nu = 0.5$ соответствует несжимаемой среде [7]. Поскольку при $\nu \rightarrow 0.5$ решение динамической теории упругости не переходит непрерывным образом в решение уравнений, описывающих поведение несжимаемой среды, естественно ожидать в этом случае сильной зависимости решения от ν . Кривая 1 характеризует интервал времени между двумя первыми локальными максимумами функции $u(t)$ при $\varphi = \pi$ и показывает, что интервал колебаний чувствителен к изменениям коэффициента Пуассона, особенно при $\nu > 0.3$. Кривые 2 и 3 характеризуют моменты времени, при которых функция $u(t)$ при $\varphi = \pi/2$ принимает два первых экстремальных значения, причем в моменты времени, соответствующие кривой 2 (или 3), функция положительна (или отрицательна). Характер кривых 2 и 3 говорит о том, что при значениях $\nu > 0.15$ боковая точка на поверхности полости вначале движется к центру полости, останавливается, а затем в течение длительного времени движется от центра.

Заметим, что, в отличие от сложившихся представлений о сравнительно быстром выходе скоростей на статическое решение, поведение кривой 4 показывает, что даже при $\nu \approx 0$ это время порядка десяти времен пробега и с ростом ν быстро растет.

Кроме приведенных на фиг. 5 кривых, представляет интерес зависимость от ν момента времени t_H , в который $u(t)$ в точке $\varphi = 0$ достигает минимального значения. Установлено, что

$$t_H = \begin{cases} 0, & v \in [0, 0.35], \\ (v - 0.35)^2, & v \in (0.35, 0.5) \end{cases}$$

Зависимости экстремальных значений функции $u = u(t)$ от коэффициента Пуассона v в трех точках на поверхности полости показаны на фиг. 6. Кривая 1 соответствует точке $\varphi = 0$. В этой точке функция $u = u(t, 0)$ имеет только минимум

$$u_{\min} = \min_{t>0} (u(t, 0)) < 0$$

Кривая 1 показывает, что $|u_{\min}|$ практически постоянна при $v \leq 0.25$, а при больших v возрастает по квадратичному закону. Кривые 2, 3 соответствуют точке $\varphi = \pi$. Линия 2 – это график функции

$$u_{\max} = \max_{t>0} (u(t, \pi)) > 0$$

а линия 3 – график функции $|u_{\min}|$

$$u_{\min} = \min_{t>0} (u(t, \pi)) < 0$$

Интересно отметить, что кривая 3 отлична от нуля при $v > 0.25$. Это означает, что при меньших значениях v точка $\varphi = \pi$ всегда движется от центра, тогда как при $v > 0.25$ она сначала движется от центра, а спустя некоторое время – обратно по направлению к центру. Точке $\varphi = \pi/2$ соответствуют кривые 4, 5. Здесь 5 – график функции $|u_{\min}|$

$$u_{\min} = \min_{t>0} (u(t, \pi/2)) < 0$$

4 – график функции

$$u_{\max} = \max_{t>0} (u(t, \pi/2)) > 0$$

Кривая 4 показывает, что при $v \leq 0.25$ точка $\varphi = \pi/2$ движется только от центра полости: $u(t, \pi/2) > 0$.

На фиг. 7 показаны зависимости максимального значения функции $v(t)$ от v в различных точках на поверхности полости. Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям $\varphi = \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$. Отметим, что, начиная с $v \geq 0.3$, в «теневой» области (кривая 3) происходит рост v_{\max} , тогда как

при $v \in [0, 0.3)$ имеем $v_{\max}(3\pi/4) = 0.72$. При $v > 0.4$ тангенциальная скорость в «тени» превышает v_{\max} в «освещенной области».

На фиг. 8 представлены коэффициенты «динамичности» K , т. е. отношение максимального значения компоненты σ (при растяжении либо при сжатии) к соответствующему значению в статике. Кривая 1 соответствует точке $\varphi = \pi/2$. Точке $\varphi = 0$ соответствуют две кривые: 2 – при $0 \leq v < 0.25$ и 3 – при $0.25 < v < 0.5$. При $\gamma^2 = 1/3$ ($v = 0.25$), согласно формуле (см. [4]) $\sigma = -2\{1 - \gamma^2[1 + 2\cos 2\varphi]\}$, статическое значение σ равно нулю и коэффициент динамичности не определен. На кривой 2 как в динамике, так и в статике σ положительно, т. е. оба напряжения растягивающие, а на кривой 3 – наоборот: оба напряжения сжимающие.

Относительная ошибка в процентах между значением компоненты в момент времени $t = 50$ и статическим значением σ^0 в точке $\varphi = \pi/2$, т. е. величина $g = 100[\sigma(50, \pi/2) - \sigma^0]/\sigma^0$, показана на фиг. 9. Кривые 1, 2 соответствуют расчетам с условием пропускания (кривая 1 – шаг $\Delta r = \Delta\varphi$, 2 – $\Delta r = 2\Delta\varphi$), кривая 3 построена по результату расчетов на расширяющейся сетке. Отметим, что существует интервал v ($v > 0.4$), в котором сопоставима точность результатов, полученных обоими методами. Для скоростей u, v при $t = 50$ величины $|u(50, \varphi) - u_p|$, $|v(50, \varphi) - v_p|$ слабо зависят от φ и меняются от 10^{-2} до 0.

Приведенные выше расчеты проводились при $q = 1$. На фиг. 10, 11 приведены зависимости решения задачи при $v = 0.25$ и $t = 50$ от размеров сетки, ячейки, величины q , а также от величины $h = (R_1 - 1)/2\pi$; на них задавались условия «пропускания» на внешней границе. На фиг. 10 по оси абсцисс отложены значения $q \in (0, 1]$, по оси ординат – отклонения полученного решения от статического (σ , кривые 1а, 1б, 2а, 2б) и от предельных значений в динамике (u , кривые 3а, 3б; здесь a соответствует сетке (r, φ) размером 60×61 , b – сетке 36×37). Кривые 1а, 1б характеризуют абсолютное отклонение $\Delta\sigma = \sigma - \sigma^0$ от статики в точке $\varphi = 0$; кривые 2а, 2б – относительное отклонение $\delta\sigma = \sigma/\sigma^0 - 1$ в точке $\varphi = \pi/2$; кривые 3а, 3б – это величины $\delta u = -(u_{\min}/2 + 1)$ в точке $\varphi = 0$.

Отметим, что, в отличие от общепринятых представлений о «сглаживании» u_{\min} с уменьшением q , кривые 3а, 3б свидетельствуют об

обратном. На фиг. 11 представлены данные, характеризующие влияние величины h на отклонение σ от статики. Кривая 1 – это $\Delta\sigma$ в точке $\varphi = 0$, 2 – это $\delta\sigma$ в точке $\varphi = \pi/2$. Видно, что с уменьшением до некоторой величины $h \approx 0.4 \div 0.5$ точность увеличивается, затем она начинает резко падать.

Выводы.

1. Результаты расчетов свидетельствуют о том, что величина отклонения σ от статического решения сильно зависит от q .

2. Полученное решение при больших временах имеет меньшее отклонение от статического в боковой области и большее – в лобовой и тыльной областях.

3. При больших временах скорости контура определяются данным алгоритмом значительно точнее, чем напряжения. В частности, погрешность в определении скоростей не зависит от угла φ .

4. При $v \leq 0.3$ отношение скорости контура в лобовой точке к соответствующему значению в падающей волне не превышает 2, как и при отражении плоских волн от плоской границы. Однако при $v > 0.3$ это отношение оказывается большим 2 (см. фиг. 6, кривая 1), а при $v > 0.4$ – больше 2.5, что указывает на нетривиальную зависимость решения от коэффициента Пуассона.

5. Максимальная концентрация на контуре ($\varphi = \pi/2$) превышает соответствующее статическое значение не более чем на 22 %.

Литература

1. Pao Y.-H., Mow C. P. Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentration. N.Y.-L.: Nielder, 1973. 693 p.
2. Гузь А. А., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. Киев: Наук. думка, 1978. 307 с.
3. Дашевский М. А. Расчет полостей в упругой среде на действие нестационарной плоской волны сжатия // Строит. механ. и расчет сооружений. 1976. № 3. С. 42–46.
4. Ковшов А. Н. О дифракции нестационарной упругой волны на цилиндрической полости // Изв. АН СССР. Механ. твердого тела. 1976. № 4. С. 115–121.
5. Скобеев А. М. Взаимодействие упругой волны с пластинкой // ПМТФ. 1972. № 2. С. 74–85.
6. Warming R. F., Kutler P., Lomax H. Second and third-order non-centered difference schemes for nonlinear hyperbolic equations // AIAA Journal. 1973. V. 11. № 2.

- Р. 189–196. = Уорминг Р. Ф., Катлер П., Ломакс Х. Нецентральные разностные схемы второго и третьего порядка точности для решения нелинейных уравнений гиперболического типа // Ракетная техн. и космонавтика. 1973. Т. 11. № 2. С. 76–85.
7. Witold Nowacki. Teoria sprężystości. Państwowe Wydawnictwo Naukowe. Warszawa. 1970. 846 s. = Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
8. Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. V. 2. Partial Differential Equations. N.-Y., L.: Intersci. 1962. 836 p. = Курант Р. Уравнения в частных производных. М.: Мир, 1964. 843 с.

Комментарии

1. *Статья «О поведении решения задач дифракции продольной волны на цилиндрической полости при больших временах» опубликована в журнале «Журнал вычислительной математики и математической физики» Том 31 № 7, 1991. С. 1020–1028; поступила в редакцию 15.03.89. Авторы – А. И. Глушко, И. И. Нецеретов.*

2. *Схема Лакса использовалась во второй главе. Со схемой распада произвольного разрыва можно ознакомиться в книге Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики – М.: Наука. – 1976. 400 с. Первоначально авторы собирались поместить в статью рисунок, на котором представлены зависимости поведения коэффициентов концентрации во времени, полученные различными схемами (в т.ч. схемами Лакса и распада произвольного разрыва). Сопоставление результатов вычислений показало, что коэффициенты концентрации, полученные с помощью схем Лакса и распада произвольного разрыва, приемлемо согласуются при временах, меньших двух времен пробега. При временах, больших двух времен пробега, решение, полученное с помощью указанных схем, сильно «размазывается», так что ни о каком выходе решения на квазистатику не может быть и речи.*

3. *Ссылка на книгу Куранта носит формальный характер и обусловлена тем фактом, что во время написания статьи отсутствовало удовлетворительное описание численной реализации метода бихарактеристик.*

Глава 5. Численное решение гиперболических систем уравнений на нерегулярной сетке

Известно, что широкий класс процессов в механике деформированного твердого тела описывается с помощью неоднородных квазилинейных гиперболических систем уравнений. Для приближенного решения таких систем существует достаточно большое число численных схем. Основным при построении той или иной численной схемы является способ аппроксимации частных производных по времени и по пространственным переменным. В зависимости от способа аппроксимации все известные методы численного решения гиперболических систем уравнений можно разделить на три класса: метод конечных разностей, метод конечных элементов и метод конечных объемов. В работе речь пойдет о построении конечно-разностной схемы для приближенного решения гиперболической системы квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка на нерегулярной сетке.

Главные усилия при приближенном решении гиперболических систем сосредотачиваются на построении «маршевой» схемы, пригодной для расчета разрывных решений с приемлемой точностью (не сильно «размазывающей» разрывы), и в то же время обеспечивающей достаточную точность гладких решений внутри расчетной области. Удовлетворить этим требованиям с той или иной степенью точности можно с помощью монотонных схем (MUSCL) либо схем с убывающей полной вариацией (TVD), либо существенно неосциллирующих схем (ENO), либо схем с разделением потоков (Flux-Splitting). В нашу задачу не входит подробное обсуждение достоинств и недостатков этих схем, заметим лишь, что определение всех неизвестных величин на границах расчетной области в этих схемах требует дополнительного рассмотрения.

Напомним, что для гиперболических систем число граничных условий всегда меньше, чем число неизвестных величин. Поэтому для определения всех величин на границе нужно построить другой алгоритм, дополняющий маршевый. Так как по постановке задачи система уравнений должна выполняться только во внутренних точках области, то в общем случае все уравнения этой системы нельзя использовать для вычисления неизвестных величин на границе области. Однако для этих целей можно воспользоваться соотношениями на характеристических поверхностях, представляющих собой некоторые линейные комбинации уравнений исходной системы. Они могут быть записаны как суммы линейных комбинаций операторов дифференцирования вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений, лежащих на характеристической поверхности. Одно из этих направлений совпадает с направлением вдоль бихарактеристики (НВБ), а два других ортогональны ему, и также принадлежат

плоскости, ортогональной оси времени. Всегда можно выбрать бихарактеристику, которая в данный момент времени проходит через нужную точку на границе, а во все предыдущие моменты времени лежит внутри области. Представленные в таком виде соотношения в дальнейшем будем называть соотношениями на бихарактеристиках (СНБ).

Несмотря на то, что СНБ а priori неизвестны, и чтобы их получить, требуется выполнить некоторые нетривиальные преобразования – найти собственные значения и левые собственные векторы характеристической матрицы исходной системы уравнений – такой подход обладает тремя несомненными достоинствами. Во-первых, можно определить значения всех неизвестных величин для любых (видов) граничных условий. Во-вторых, СНБ можно аппроксимировать по явной схеме, где роль времени играет НВБ, а операторы дифференцирования по двум другим направлениям можно аппроксимировать с помощью левых и правых конечно-разностных соотношений, и построить таким образом устойчивые разностные схемы. Наконец, так можно получить наилучшее (по сравнению с другими методами) приближение к точному решению при определении неизвестных величин на границах области.

Одним из первых, кто использовал СНБ для решения систем гиперболических уравнений с тремя независимыми переменными, был Батлер. СНБ приведены в его работе [1], при этом используется метод, отличный от применяемого в настоящей работе. Там же построен алгоритм решения задачи Коши для уравнений газовой динамики в двумерной нестационарной и трехмерной сверхзвуковой постановках. Клифтон развил идеи Батлера и в [2] предложил численный метод решения двумерных динамических задач теории упругости, в котором с помощью СНБ приближенное решение строится как внутри расчетной области, так и на ее границе. При этом оказалось, что численная схема, используемая внутри области, совпадает с известной схемой Лакса – Вендроффа [3]. Обобщение метода Клифтона для численного решения трехмерных динамических задач теории упругости было сделано в [4]. В работе [5] СНБ используются главным образом для построения разностных соотношений, применяемых во всей расчетной области для приближенного решения стационарных сверхзвуковых задач газовой динамики.

Наряду с достоинствами методы численного решения, использующие СНБ, обладают существенным недостатком. Их алгоритмическая сложность (а следовательно, и время вычислений) значительно выше, чем для методов, использующих маршевые схемы. Поэтому достаточно привлекательной выглядит идея создать метод, сочетающий достоинства СНБ с относительной простотой, характеризующей шаблон маршевой схемы. Именно такая идея используется в [6] для приближенного решения двумерной нестационарной задачи теории упругости на регулярной сетке: во внутренней области в качестве маршевой используя схему Мак-Кормака [7], а на границе используя СНБ.

Целью данной работы является распространение этой идеи на случай нерегулярной сетки и четырех независимых переменных для построения численного решения смешанных задач для гиперболических систем уравнений. Для этого необходимо вывести СНБ для гиперболических систем квазилинейных уравнений для случая четырех переменных и распространить шаблон Мак-Кормака на нерегулярную сетку. В принципе предлагаемый метод можно было бы назвать сеточно-характеристическим. Однако в существующей математической литературе [5] это название¹ уже использовано.

1. В настоящей работе основное внимание уделяется построению алгоритма решения системы уравнений, которая была предложена для описания процессов деформирования и разрушения твердых тел [8]. В качестве неизвестных величин фигурируют компоненты ε_{jk} , $j, k = 1, 2, 3$, тензора упругих деформаций ε , компоненты вектора скорости² $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ и повреждаемость D . Заметим, что в неупругом твердом теле тензор упругих деформаций не совпадает с тензором деформаций Альманзи (или Коши – Грина) [9], который вычисляется через производные от компонент вектора перемещений. Будем рассматривать совокупность этих величин как компоненты некоторого вектора в прямом произведении соответствующих линейных пространств и обозначим этот вектор через $\mathbf{w} = (\mathbf{u}, \varepsilon, D)^T$.

Перейдем к постановке математической задачи. Неизвестные величины $\mathbf{u}, \varepsilon, D$ должны удовлетворять следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} \rho \partial u_i / \partial t &= \partial \left[\lambda(D) \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu(D) \varepsilon_{ij} \right] / \partial x^j, \quad \partial D / \partial t = f(D, \varepsilon) \\ \partial \varepsilon_{ij} / \partial t &= 0.5 \left(\partial u_i / \partial x^j + \partial u_j / \partial x^i \right) - \left(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_{kk} / 3 \right) / \tau_\varepsilon - \Lambda(D) \delta_{ij} \partial D / \partial t \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $i, j = 1, 2, 3$, $\lambda, \mu, \tau_\varepsilon, \Lambda, f$ – некоторые функции, x^i – декартовы координаты, t – время, ρ – плотность³, δ_{ij} – символ Кронекера. Заметим, что система (1.1) описывает поведение вязкоупругого тела Максвелла при $f \equiv 0, \tau_\varepsilon \neq 0$ и линейно-упругого тела при $f \equiv 0, \tau_\varepsilon \equiv 0$.

Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ твердое тело занимает в трехмерном пространстве \mathbb{R}^3 в общем случае неограниченную

¹ По этой терминологии методы, развитые в работах [1], [2], [4], также являются сеточно-характеристическими.

² Здесь T – символ операции транспонирования.

³ Далее подразумевается, что система (1.1) записана в безразмерном виде, в котором $\rho = 1$.

область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. При $t = 0$ известны начальные значения вектора скорости, тензора упругих деформаций и повреждаемости

$$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_0(x), \quad \boldsymbol{\varepsilon}(0, x) = \boldsymbol{\varepsilon}_0(x), \quad D(0, x) = D_0(x) \quad (1.2)$$

На границе тела $\partial\Omega$ могут быть заданы граничные условия одного из следующих типов.

Известен вектор внешних усилий $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t, x)$, приложенных к поверхности тела

$$\boldsymbol{\sigma}_n(t, x) = \mathbf{P}(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (1.3)$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}_n = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, $\sigma_i = \sigma_{ij}\mathbf{n}_j$, $i, j = 1, 2, 3$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$ – вектор внешней нормали к поверхности тела.

Известно внешнее поле скоростей $\mathbf{V}(t, x)$

$$\mathbf{u}(t, x) = \mathbf{V}(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (1.4)$$

Известны проекция u_n вектора скорости на нормаль к поверхности тела и проекция $\boldsymbol{\tau}_n$ вектора внешних усилий на касательную плоскость к поверхности

$$u_n = \mathbf{V}(t, x) \cdot \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{P}(t, x) \cdot \mathbf{n}, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (1.5)$$

$$u_n = u_i n_i, \quad (\boldsymbol{\tau}_n)_j = (\sigma_{ki} n_k - \sigma_{kl} n_k n_l n_j), \quad j = 1, 2, 3, \quad (\boldsymbol{\tau}_n \cdot \mathbf{n}) = 0$$

Задается разбиение границы тела $\partial\Omega$ на две и более частей $\partial_1\Omega$, $\partial_2\Omega$ и на каждой из них задаются граничные условия одного из перечисленных выше типов.

В зависимости от класса функций, к которому принадлежат начальные значения и граничные условия, решение задачи (1.1), (1.2) – (1.5) строится в соответствующем бесконечномерном функциональном пространстве. Ее приближенное решение строится в конечномерном функциональном пространстве. Предполагается, что в Ω задана сетка Ω_h , т. е. некоторое конечное множество точек $R_k \in \Omega$, $k = 1, 2, \dots, M$, которые называются узлами сетки. Пусть задан интервал времени $t^0 \leq t \leq T$ и его разбиение t^k , $k = 1, \dots, N$. Рассматриваются функции, заданные на сетке Ω_h при каждом t^k . Считается, что сетка сгенерирована с помощью какой-либо независимой процедуры, а расположение ее узлов локально должно удовлетворять следующему условию: в каждом узле R_k сетки можно ввести локальную систему координат $\bar{R} = \bar{R}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ так, что координатные линии этой системы упорядочивают соседние близлежащие узлы. Упорядочение означает, что $R_k = \bar{R}(0)$, а для соседних узлов R_M (M – номер

соседней точки) справедливо $R_M = R_{jk} = \bar{R}(i\Delta, j\Delta, k\Delta), i, j, k = \pm 1$, так что возникает взаимно однозначное отображение $\{i, j, k\} \leftrightarrow M, \Delta$ – некоторое достаточно малое число, шаг в локальной системе (ξ^1, ξ^2, ξ^3) .

Чтобы аппроксимировать частные производные по координатам, воспользуемся понятием производной функции вдоль направления и напомним ее определение (см. любой курс анализа, например [10]). Для этого рассмотрим скалярное поле функции⁴ $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x, y, z)$. Возьмем некоторую точку поля $M(\mathbf{r})$, проведем через нее прямую и выберем направление по этой прямой с помощью единичного вектора $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$. Возьмем на этой прямой соседнюю с M точку $M'(\mathbf{r} + \varepsilon\mathbf{n})$, где ε – некоторая малая величина, при переходе от M к M' функция приобретает приращение $\Delta\varphi = \varphi(\mathbf{r} + \varepsilon\mathbf{n}) - \varphi(\mathbf{r})$. Составим отношение и перейдем к пределу, устремляя ε к 0; полученный предел, если он существует, назовем производной φ вдоль направления \mathbf{n} в точке M и обозначим через $\partial\varphi/\partial\mathbf{n}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} = \lim_{|MM'| \rightarrow 0} \frac{\varphi(M') - \varphi(M)}{|MM'|} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{r} + \varepsilon\mathbf{n}) - \varphi(\mathbf{r})}{\varepsilon}$$

Если функция дифференцируема в точке M , то она дифференцируема по любому направлению \mathbf{n} , и производная по этому направлению $\partial\varphi/\partial\mathbf{n}$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} n_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} n_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} n_z \quad (1.6)$$

Воспользуемся (1.6) и выразим частные производные по координатам через производные по трем линейно независимым направлениям (ЛНН) L_1, L_2, L_3

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = \frac{1}{A} \frac{\partial\varphi}{\partial L_k} M(L_i^k) \quad (1.7)$$

Здесь $L_j^i = \cos(x^i, L_j)$ – проекции единичных векторов $L_i, i = 1, 2, 3$ на оси координат $x^j, j = 1, 2, 3$, через $M(L_i^j)$ обозначено алгебраическое дополнение

⁴ Наряду с (x^1, x^2, x^3) декартовы координаты обозначаются и как (x, y, z) .

элемента L_i^j матрицы $L = \|L_i^j\|$, ($A = \det L$), т. е. определитель 2-го порядка, полученный из A вычеркиванием j -й строки и i -го столбца и взятый со знаком $(-1)^{i+j}$ (см. [11]). Теперь с помощью (1.7) аппроксимируем частные производные по координатам конечными разностями на нерегулярной сетке. Эта конструкция является центральной в построении алгоритма для внутренних узлов.

Возьмем произвольный внутренний узел и обозначим его через P_0 . С помощью локальной системы координат (ξ^1, ξ^2, ξ^3) задаются три ЛНН. Обозначим через $P_i, i = 1, 2, 3$, соседний узел, лежащий на координатной оси ξ^i , и такой, что направление вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$ совпадает с положительным направлением этой координатной оси. Аналогично, через $P_i, i = 4, 5, 6$ обозначим соседний узел, лежащий на координатной оси ξ^{i-3} , и такой, что направление вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$ противоположно направлению ξ^i . Значения вектор-функций в этих узлах будем обозначать через $\varphi_k = \varphi(P_k)$ при $k = 0, \dots, 6$.

Чтобы получить конечно-разностные аппроксимации частных производных по пространственным переменным, заменим значения производных по направлениям конечными разностями значений функций в узлах сетки, а в качестве трех ЛНН берем направления, которые определяются либо узлами P_1, P_2, P_3 , либо P_4, P_5, P_6 . В первом случае частные производные аппроксимируются с помощью следующих соотношений:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \approx \frac{\Delta \varphi}{\Delta x^i} \triangleq \frac{1}{A} \sum_{k=1}^3 (\varphi_k - \varphi_0) M(L_i^k) \quad (1.8)$$

где

$$L_i^k = (x_i^k - x_0^k) / S_i, \quad S_i = \left[\sum_{k=1}^3 (x_k^k - x_0^k)^2 \right]^{1/2} \quad (1.9)$$

Напомним, что через $x_i^k, k = 1, 2, 3, i = 0, 1, 2, 3$ обозначаются значения k -й координаты в узлах P_i . Если взять другие три узла P_4, P_5, P_6 , то производные аппроксимируются выражениями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \approx \frac{\nabla \varphi}{\Delta x^i} \triangleq \frac{1}{A} \sum_{k=4}^6 (\varphi_k - \varphi_0) M(L_i^{k-3}) \quad (1.10)$$

Входящие в (1.10) величины L_i^k и S_i определяются по формулам, аналогичным (1.9), в правых частях которых нижний индекс i заменен на $i+3$. Выражения (1.8) и (1.10) будем называть, соответственно, правыми и левыми конечно-разностными соотношениями.

До сих пор речь шла об аппроксимации пространственных производных. Для построения численного решения системы гиперболических уравнений воспользуемся методом Рунге – Кутты второго порядка точности [12] для системы обыкновенных дифференциальных уравнений $d\mathbf{u}/dt = f(\mathbf{u}, t)$. Чтобы перейти от решения в момент времени $n\Delta t$ к решению в момент времени $(n+1)\Delta t$, схему Рунге – Кутты необходимо записать в форме «предиктор – корректор» следующим образом. На шаге «предиктор» вычисляется промежуточное значение $\mathbf{u}^{(1)}$, а затем на шаге «корректор» – значение вектор-функции \mathbf{u}^{n+1} по формулам

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{f}^n, \quad (1.11)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \left(\mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{f}^{(1)} \right) / 2, \quad (1.12)$$

Значения $\mathbf{u}^{(1)}$ и $\mathbf{f}^{(1)}$ вычисляются в момент $t^{n+1/2}$, $t^{n+1/2} = (n+1/2)\Delta t$. Перепишем для удобства систему (1.1) в дивергентном виде:

$$\partial \mathbf{w} / \partial t = \partial \mathbf{F}(\mathbf{w}) / \partial x + \partial \mathbf{G}(\mathbf{w}) / \partial y + \partial \mathbf{H}(\mathbf{w}) / \partial z - \mathbf{E} \quad (1.13)$$

В (1.13) через $\mathbf{w}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{E}$ обозначены 10-мерные векторы:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^T &= \{u_1, u_2, u_3, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, D\}, \\ \mathbf{F}^T &= \{\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \mu \varepsilon_{12}, \mu \varepsilon_{13}, u_1, u_2, 0, u_3, 0, 0, 0\}, \\ \mathbf{G}^T &= \{\mu \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}), \mu \varepsilon_{13}, 0, u_1, u_2, 0, u_3, 0, 0\}, \\ \mathbf{H}^T &= \{\mu \varepsilon_{13}, \mu \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), 0, 0, 0, u_1, u_2, u_3, 0\}, \\ \mathbf{E}^T &= \{\varepsilon_{11} \partial(\lambda + 2\mu) / \partial x + \varepsilon_{12} \partial \mu / \partial y + \varepsilon_{13} \partial \mu / \partial z, \\ &\quad \varepsilon_{12} \partial \mu / \partial x + \varepsilon_{22} \partial(\lambda + 2\mu) / \partial y + \varepsilon_{23} \partial \mu / \partial z, \\ &\quad \varepsilon_{13} \partial \mu / \partial x + \varepsilon_{23} \partial \mu / \partial y + \varepsilon_{33} \partial(\lambda + 2\mu) / \partial z, \\ &\quad \tau_\varepsilon + \Lambda \partial D / \partial t, \tau_\varepsilon, \tau_\varepsilon + \Lambda \partial D / \partial t, \tau_\varepsilon, \tau_\varepsilon, \tau_\varepsilon + \Lambda \partial D / \partial t, 0\} \end{aligned}$$

Применяя к (1.13) алгоритм Рунге – Кутты (1.11), (1.12) и выражая с помощью (1.8) и (1.10) пространственные производные, получаем иско-
мые соотношения, которые определяют решение во внутренних точках:

на «предикторе»

$$\mathbf{w}_0^{(1)} = \mathbf{w}_0^n + \Delta t \left[\sum_{k=1}^3 \left\{ \left(\mathbf{F}(\mathbf{w}_k^n) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_0^n) \right) M(L_1^k) + \left(\mathbf{G}(\mathbf{w}_k^n) - \right. \right. \right. \quad (1.14)$$

$$\left. \left. \left. - \mathbf{G}(\mathbf{w}_0^n) \right) M(L_2^k) + \left(\mathbf{H}(\mathbf{w}_k^n) - \mathbf{H}(\mathbf{w}_0^n) \right) M(L_3^k) \right\} / A(L) - \mathbf{E}(\mathbf{w}_0^n) \right]$$

на корректоре

$$\mathbf{w}_0^{n+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{w}_0^{(1)} + \mathbf{w}_0^n) + \frac{1}{2} \Delta t \left(\sum_{k=4}^6 \left[\left[\mathbf{F}(\mathbf{w}_k^{(1)}) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_0^{(1)}) \right] M(L_1^{k-3}) + \right. \right. \quad (1.15)$$

$$\left. \left. \left[\mathbf{G}(\mathbf{w}_k^{(1)}) - \mathbf{G}(\mathbf{w}_0^{(1)}) \right] M(L_2^{k-3}) + \right. \right.$$

$$\left. \left. \left[\mathbf{H}(\mathbf{w}_k^{(1)}) - \mathbf{H}(\mathbf{w}_0^{(1)}) \right] M(L_3^{k-3}) \right\} / A(L) - \mathbf{E}(\mathbf{w}_0^n) \right)$$

Если предположить, что сетка является регулярной и ортогональ-
ной, то можно показать, что выражения (1.14), (1.15) в этом случае совпа-
дают с соответствующими выражениями для «предиктора» и «корректора»
из [12]. Таким образом, построенный алгоритм для решения системы гипер-
болических уравнений (1.1) является обобщением метода Мак-Кормака [7]
на случай нерегулярной сетки.

**2. Прежде чем приступить к построению решения для гранич-
ных узлов, введем важное понятие бихарактеристики и покажем, как
выводятся соотношения на ней для системы (1.1).** Так как уравнение для
 D из (1.1) является обыкновенным дифференциальным и численная реали-
зация его решения на границе не вносит ничего нового по сравнению с внут-
ренней областью, в дальнейшем под исходной системой подразумеваются
первые девять уравнений (1.1). Известно [13], что для системы гиперболи-
ческих уравнений из n уравнений первого порядка относительно n функций
от m независимых переменных существуют n (не обязательно различные)
характеристические поверхности в m -мерном пространстве независимых
переменных. В свою очередь, характеристическая поверхность – это
 $(m - 1)$ – мерное многообразие, на котором можно задать такие линейные
комбинации уравнений исходной системы, что в этих комбинациях будут
отсутствовать производные по нормали к ней самой. Упомянутые линейные
комбинации называются бихарактеристическими соотношениями или СНБ.

Для (1.13) характеристической является поверхность, на которой справедливо равенство – характеристическое соотношение

$$\begin{aligned} & (\partial\varphi/\partial t)^3 \left\{ (\partial\varphi/\partial t)^2 - c_1 \left[(\partial\varphi/\partial x)^2 + (\partial\varphi/\partial y)^2 + (\partial\varphi/\partial z)^2 \right] \right\} \times \\ & \times \left\{ (\partial\varphi/\partial t)^2 - c_2 \left[(\partial\varphi/\partial x)^2 + (\partial\varphi/\partial y)^2 + (\partial\varphi/\partial z)^2 \right] \right\}^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $c_1 = \sqrt{\lambda + 2\mu}$, $c_2 = \sqrt{\mu}$ и называются скоростями продольных и поперечных волн, соответственно. В упругом теле $c_1 = 1$, $c_2 = \text{const} < 1$. Обращаем внимание на кратность первого множителя и на кратность второго множителя в фигурных скобках в (2.1).

Выражение (2.1) обращением в нуль каждого из множителей эквивалентно трем равенствам, каждое из которых можно записать в виде

$$(\partial\varphi/\partial t)^2 - c_k \left[(\partial\varphi/\partial x)^2 + (\partial\varphi/\partial y)^2 + (\partial\varphi/\partial z)^2 \right] = 0, \quad k = 0, 1, 2 \quad (2.2)$$

Первый множитель удовлетворяет (2.2) при собственном значении c_0 характеристической матрицы, тождественно равным нулю. Кратность c_0 равна трем. Это равенство определяет пучок характеристических плоскостей, проходящих через прямую, параллельную оси OT . Можно показать, что два других множителя соответствуют двум двухпараметрическим семействам характеристических поверхностей.

В самом деле, любая плоскость с уравнением $\varphi(t, x) = 0$, где

$$\begin{aligned} \varphi(t, x) &= c_k(t - t_0) + n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0), \\ n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 &= 1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

удовлетворяет равенству (2.2) и таким образом также является характеристической и проходящей через точку $P(t_0, x_0, y_0, z_0)$. Так как (2.3) представляет собой двухпараметрическое семейство характеристических поверхностей, то и огибающая этого семейства также будет удовлетворять (2.2) и являться характеристической поверхностью. Можно проверить, что для (2.3) огибающей является прямой круговой конус с вершиной в точке $P(t_0, x_0, y_0, z_0)$ и уравнением

$$(t - t_0)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0$$

Конус, соответствующий $c_k = c_1$ ($c_k = c_2$), называется характеристическим конусом продольных (соответственно, поперечных) волн. Заметим, что для первого множителя в (2.1) конус вырождается в линию, параллельную оси OT , а его образующая совпадает с OT . Для наших целей достаточно определить бихарактеристику как образующую

характеристического конуса. Для первого сомножителя в (2.1) бихарактеристика часто называется линией тока. Всякая образующая характеристического конуса может быть представлена параметрически в виде

$$t = s + t_0, \quad x = c_k n_x s + x_0, \quad y = c_k n_y s + y_0, \quad z = c_k n_z s + z_0,$$

где s – параметр. Введем НВБ с помощью единичного вектора α^k

$$\alpha^k = \frac{1}{\omega^k} \begin{pmatrix} 1 \\ c_k n_x \\ c_k n_y \\ c_k n_z \end{pmatrix}, \quad \omega^k = \sqrt{1 + c_k^2} \quad (2.4)$$

и определим \mathbf{u}^0

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}(t, n_x c_k (t - t_0) + x_0, n_y c_k (t - t_0) + y_0, n_z c_k (t - t_0) + z_0)$$

Из этих определений и из (1.6) следует, что производная вдоль бихарактеристики D_{α^k} и производная $d\mathbf{u}^0/dt$ связаны друг с другом равенством

$$D_{\alpha^k} \mathbf{u} = \left[\partial \mathbf{u} / \partial t + c_k (n_x \partial \mathbf{u} / \partial x + n_y \partial \mathbf{u} / \partial y + n_z \partial \mathbf{u} / \partial z) \right] / \omega^k = (d\mathbf{u}^0 / dt) / \omega^k \quad (2.5)$$

Значение $k = 1 (k = 2)$ соответствует бихарактеристике, лежащей на конусе продольных (поперечных) волн. Если проекция бихарактеристики на трехмерное пространство переменных $\{x^1, x^2, x^3\}$ ортогональна одной из координатных плоскостей, то СНБ выводятся проще. В силу инвариантности системы уравнений и инвариантности характеристик относительно преобразований координат с помощью полученных ниже соотношений легко получить СНБ и в общем случае. Покажем, как выводятся характеристические соотношения для случая, когда проекция бихарактеристики ортогональна плоскости OYZ .

Перепишем систему (1.13) в матричном виде:

$$\partial \mathbf{w} / \partial t + \mathbf{A}_x \partial \mathbf{w} / \partial x + \mathbf{A}_y \partial \mathbf{w} / \partial y + \mathbf{A}_z \partial \mathbf{w} / \partial z + \mathbf{f} = 0 \quad (2.6)$$

В этом случае α^k имеет компоненты $(1, c_k n_x, 0, 0)^T / \omega^k$, отличные от (2.4), и (2.5) приобретает вид

$$D_{\alpha^k} \mathbf{u} = (\partial \mathbf{u} / \partial t + c_k n_x \partial \mathbf{u} / \partial x) / \omega^k \triangleq D_{xm} \mathbf{u} / \omega^k \quad (2.7)$$

где первый индекс x указывает на то, что проекция бихарактеристики ортогональна плоскости OYZ , а индекс m может принимать значения p, q и s , указывающие на то, что бихарактеристика принадлежит конусу продольных волн, если $m = p (k = 1)$, или конусу поперечных волн, если $m = q$ или

$m = s(k = 2)$. Введенный в (2.7) оператор D_{xm} дифференцирования вдоль бихарактеристики соответствует случаю, когда ее проекция совпадает с осью OX .

Воспользуемся (2.7), чтобы выразить из него оператор $\partial/\partial t$

$$\partial/\partial t = \omega^k D_{xm} - c_k n_x \partial/\partial x$$

Подставим это выражение в (2.6) и затем умножим его на левый собственный вектор \mathbf{I}_x матрицы \mathbf{A}_x , отвечающий собственному значению $c_k n_x$

$$\mathbf{I}_x \mathbf{A}_x = \mathbf{I}_x c_k n_x$$

Напомним, что левый собственный вектор \mathbf{I} матрицы \mathbf{A} определяется из условия $\mathbf{I}\mathbf{Q} = 0$, где $\mathbf{Q} = v\mathbf{I} - \mathbf{A}$, \mathbf{I} – единичная матрица, v – собственное значение, определяемое из $\det|\mathbf{Q}| = 0$. В нашем случае $v_1 = \pm c_1$, $v_2 = v_3 = \pm c_2$. Подчеркнем, что \mathbf{I}_x зависит от величины n_x , которая принимает два значения ± 1 . Тогда получим

$$\begin{aligned} & \mathbf{I}_x \left(\partial \mathbf{w} / \partial t + \mathbf{A}_x \partial \mathbf{w} / \partial x + \mathbf{A}_y \partial \mathbf{w} / \partial y + \mathbf{A}_z \partial \mathbf{w} / \partial z + \mathbf{f} \right) = \\ & = \mathbf{I}_x \left[\left(\omega^k D_{xm} \mathbf{w} - c_k n_x \partial \mathbf{w} / \partial x \right) + \mathbf{A}_y \partial \mathbf{w} / \partial y + \mathbf{A}_z \partial \mathbf{w} / \partial z + \mathbf{f} \right] = (2.8) \\ & = \omega^k \mathbf{I}_x D_{xm} \mathbf{w} + \mathbf{I}_x \mathbf{A}_x \partial \mathbf{w} / \partial x + \mathbf{I}_x \mathbf{A}_y \partial \mathbf{w} / \partial y + \mathbf{I}_x \mathbf{A}_z \partial \mathbf{w} / \partial z + \mathbf{I}_x \mathbf{f} = 0 \end{aligned}$$

Выражения (2.8) – искомые СНБ для случая, когда проекция бихарактеристики ортогональна плоскости OYZ , (2.8) можно переписать в более компактном виде:

$$(a_i D_{xm} + b_i D_1 + c_i D_2) w^i + \mathbf{I}_x \mathbf{f} = 0 \quad (2.9)$$

где D_1 и D_2 – операторы дифференцирования вдоль двух других направлений, лежащих на характеристической плоскости и ортогональных НВБ; коэффициенты $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, \dots, n$, зависят от \mathbf{I}_x . Обращаем внимание на то, что (2.9) содержит только три независимых переменных в отличие от (1.1), где их четыре. Можно показать, что это справедливо и в общем случае для любого направления α .

Прежде чем перейти к записи левых собственных векторов для системы (1.13) напомним, что если все собственные значения простые, то каждому собственному значению соответствует свой собственный вектор. В общем случае возможна ситуация [13], когда кратному собственному значению характеристической матрицы соответствует только один собственный вектор, что приводит к усложнению алгоритма. Однако для (1.13) прямыми вычислениями можно показать, что существуют два линейно независимых собственных вектора, соответствующих

собственному значению $v_2 = \pm c_2$. Для собственного значения $v_0 = 0$ существуют три линейно независимых собственных вектора, каждый из которых имеет одну отличную от нуля и равную единице компоненту. Так, в случае, когда проекция бихарактеристики ортогональна плоскости OYZ , первый такой вектор имеет ненулевую пятую компоненту, второй – шестую, а третий – девятую.

Выпишем покомпонентно левые собственные векторы, собственному значению $v_1 = c_1 n_x$ соответствует один вектор \mathbf{I}_x^p , а значению $v_2 = c_2 n_x$ – два вектора \mathbf{I}_x^q и \mathbf{I}_x^s :

$$\mathbf{I}_x^p = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \\ n_x c_1 \\ n_x \lambda \\ n_x \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_x^q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n_x c_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_x^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n_x c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

В (2.10) принимаем $n_x = -1$, если расчетная область лежит справа от точки x_0 , и $n_x = 1$, если расчетная область лежит слева от точки x_0 . Подставляя (2.10) в (2.8), после приведения подобных членов получаем

$$\begin{aligned} \omega^k (D_{xp} u + n_x D_{xp} \sigma) + \lambda (\partial_y v + \partial_z w) + n_x c_1 \mu (\partial_y \gamma + \partial_z \kappa) &= \mathbf{I}_x^p \mathbf{f} \\ \omega^k (D_{xq} v + n_x c_2 D_{xq} \gamma) + c_2 \partial_y u + n_x (\partial_y S + \mu \partial_z \chi) &= \mathbf{I}_x^q \mathbf{f} \\ \omega^k (D_{xs} w + n_x c_2 D_{xs} \kappa) + c_2 \partial_z u + n_x (\mu \partial_y \chi + \partial_z R) &= \mathbf{I}_x^s \mathbf{f} \end{aligned} \quad (2.11)$$

где приняты следующие обозначения: $u = u_1, v = u_2, w = u_3, \sigma = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), S = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}), R = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \gamma = \varepsilon_{12}, \kappa = \varepsilon_{13}, \chi = \varepsilon_{23}, \partial_s$ – оператор частной производной по координате s .

СНБ, соответствующие линии тока, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\partial \varepsilon_{22} / \partial t &= \partial v / \partial y - (2\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{33}) / (3\tau_\varepsilon) - \Lambda(D) \partial D / \partial t \\ \partial \varepsilon_{33} / \partial t &= \partial w / \partial z - (2\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) / (3\tau_\varepsilon) - \Lambda(D) \partial D / \partial t \\ \partial \chi / \partial t &= \partial v / \partial z + \partial w / \partial y - \chi / \tau_\varepsilon\end{aligned}\quad (2.12)$$

и совпадают с соответствующими уравнениями (1.1).

Проводя аналогичные рассуждения, можно получить СНБ для случаев, когда проекции бихарактеристик ортогональны другим координатным плоскостям. Обобщим определение оператора дифференцирования (2.7) на случаи, когда проекции бихарактеристик совпадают с осями OY и OZ .

$$D_{vn} = \partial / \partial t + c_k n_v \partial / \partial v \quad (2.13)$$

где первый индекс v может принимать значение x, y или z и указывает на ось, которая параллельна нормали к характеристической поверхности, а второй индекс вводится аналогично (2.7). Выпишем покомпонентно левые собственные векторы $\mathbf{I}_y^p, \mathbf{I}_y^q, \mathbf{I}_y^s$ для плоскости OXZ :

$$\mathbf{I}_y^p = \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \\ 0 \\ n_y \lambda \\ n_y c_1 \\ n_y \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_y^q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n_y c_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_y^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n_y c_2 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

и $\mathbf{I}_z^p, \mathbf{I}_z^q, \mathbf{I}_z^s$ для плоскости OXY

$$\mathbf{I}_z^p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \\ n_z \lambda \\ n_z \lambda \\ n_z c_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_z^q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n_z c_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_z^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n_z c_2 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

В (2.14), (2.15) значения для n_y и n_z принимаются так же, как и для n_x в (2.10). Используя (2.13), имеем для бихарактеристик, проекции которых ортогональны плоскости OXZ :

$$\begin{aligned} \omega^k (D_{yp} v + n_y D_{yp} S) + \lambda (\partial_x u + \partial_z w) + n_y c_1 \mu (\partial_x \gamma + \partial_z \chi) &= \mathbf{I}_y^p \mathbf{f} \\ \omega^k (D_{yq} u + n_y c_2 D_{yq} \gamma) + c_2 \partial_x v + n_y (\partial_x \sigma + \mu \partial_z \kappa) &= \mathbf{I}_y^q \mathbf{f} \\ \omega^k (D_{ys} w + n_y c_2 D_{ys} \chi) + c_2 \partial_z v + n_y (\mu \partial_x \kappa + \partial_z R) &= \mathbf{I}_y^s \mathbf{f} \end{aligned} \quad (2.16)$$

В этом случае на линии тока два СНБ имеют вид

$$\begin{aligned} \partial \varepsilon_{11} / \partial t &= \partial u / \partial x - (2\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}) / (3\tau_\varepsilon) - \Lambda(D) \partial D / \partial t \\ \partial \kappa / \partial t &= \partial u / \partial z + \partial w / \partial x - \kappa / \tau_\varepsilon \end{aligned} \quad (2.17)$$

а третья совпадает со вторым уравнением (2.12).

Для бихарактеристик, проекции которых ортогональны плоскости OXY , имеем

$$\begin{aligned} \omega^k (D_{zp} w + n_z D_{zp} R) + \lambda (\partial_y v + \partial_x u) + n_z c_1 \mu (\partial_x \kappa + \partial_y \chi) &= \mathbf{I}_z^p \mathbf{f} \\ \omega^k (D_{zq} u + n_z c_2 D_{zq} \kappa) + c_2 \partial_y w + n_z (\partial_x \sigma + \mu \partial_y \gamma) &= \mathbf{I}_z^q \mathbf{f} \\ \omega^k (D_{zs} v + n_z c_2 D_{zs} \chi) + c_2 \partial_y w + n_z (\mu \partial_x \gamma + \partial_y S) &= \mathbf{I}_z^s \mathbf{f} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Для этого случая одно СНБ на линии тока имеет вид

$$\partial \gamma / \partial t = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x - \gamma / \tau_\varepsilon$$

а два других совпадают с первыми уравнениями (2.12) и (2.17). Отметим, что в случае, когда напряженно-деформированное состояние в данной

точке соответствует упругому телу (что отвечает ситуации, наиболее важной для практики), правая часть выражений (2.12), (2.16), (2.18) тождественно равна нулю.

3. Будем считать, что область решения Ω ограничена границей Γ , представляющей собой многогранник, т. е. состоит из конечного объединения плоскостей-граней, которые, в свою очередь, пересекаются по ребрам. Сетка должна быть сгенерирована таким образом, что каждая грань содержит достаточное количество узлов сетки, не принадлежащих ребрам. В большей части этого раздела речь будет идти о построении решения (1.1) на гранях. Заключительная часть раздела касается особенностей алгоритма для точек, принадлежащих ребрам.

Если обратиться к граничным условиям (1.3) – (1.5), то нетрудно заметить, что они дают только три уравнения для девяти неизвестных. Вместе с тем, формулы для решения во внутренних точках определены для 10-мерного вектора, тем самым и на границах должны определяться все десять неизвестных. Для того чтобы доопределить решение на границе, воспользуемся СНБ, полученными в предыдущем разделе. Напоминаем, что из любой точки, находящейся внутри расчетной области, можно выпустить три характеристические поверхности, на бихарактеристиках которых справедливы соотношения (2.12), (2.16), (2.18). Эти соотношения (вместе с СНБ, соответствующим линиям тока) существенным образом используются при построении решения для граничных узлов, поэтому приведем их здесь еще раз, но в более удобной, дивергентной форме:

$$\mathbb{D}\mathbf{q} + \boldsymbol{\phi}\mathbf{g} + \boldsymbol{\pi}\mathbf{h} = \mathbf{e} \quad (3.1)$$

где $\mathbb{D} = \omega^k \text{diag} \{D_{xp}, D_{xq}, D_{xs}, D_{yp}, D_{yq}, D_{ys}, D_{zp}, D_{zq}, D_{zs}\}$ – диагональная матрица-оператор от дифференцирований по направлениям, ее компоненты определены в (2.13), $\mathbf{q}, \mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{e}$ – векторы и $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\pi}$ – диагональные матрицы-операторы:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^T &= \{u + n_x \sigma, v + n_x c_2 \gamma, w + n_x c_2 \kappa, v + n_y S, \\ &u + n_y c_2 \gamma, w + n_y c_2 \kappa, w + n_z R, u + n_z c_2 \kappa, v + n_z c_2 \chi\}, \\ \mathbf{h}^T &= \{\lambda w + n_x \mu \kappa, n_x \mu \chi, n_x R, \lambda w + n_y \mu \chi, n_y \mu \kappa, \\ &c_2 v + n_y R, \lambda v + n_z \mu \chi, n_z \mu \gamma, c_2 w + n_z S\} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\phi} = \text{diag} \{\partial_y, \partial_y, \partial_y, \partial_x, \partial_x, \partial_x, \partial_x, \partial_x\}, \quad \boldsymbol{\pi} = \text{diag} \{\partial_z, \partial_z, \partial_z, \partial_z, \partial_z, \partial_z, \partial_y, \partial_y, \partial_y\}$$

Компоненты \mathbf{e} представляют собой правые части выражений (2.12), (2.16), (2.18). Для бихарактеристик, проекции которых ортогональны

плоскости OYZ $n_x = \pm 1, n_y = n_z = 0$ (соответственно, для плоскости OXZ $n_y = \pm 1, n_x = 0, n_z = 0$, для OXY $n_z = \pm 1, n_y = n_x = 0$).

Так как компоненты матриц Φ и Π суть производные по пространству, то для того, чтобы применить алгоритм Рунге – Кутты (1.11), (1.12) к (3.1), необходимо аппроксимировать производную $D_{vm} \mathbf{u}$ вдоль бихарактеристики конечно-разностным соотношением. Для этого возьмем бихарактеристику, проходящую через точку $P_0(t_0, x_0)$ и принадлежащую характеристическому конусу, направленному вниз. Обозначим пересечение этой бихарактеристики с плоскостью $t = t^n$ через $P_1(t_1, x_1), t_1 = t^n$. Тогда в общем случае, используя (2.5), получаем

$$\omega^k D_{vm} \mathbf{u} \approx [\mathbf{u}(P_0) - \mathbf{u}(P)] / \Delta t$$

На шаге «предиктор» вычисляется промежуточное значение $\mathbf{u}^{(1)}$, которое удовлетворяет соотношению

$$\omega^k D_{vm} \mathbf{u} \approx [\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}(P)] / \Delta t \quad (3.2)$$

На шаге «корректор» вычисляется значение вектор-функции $\mathbf{u}(P_0)$ в точке P_0 , исходя из соотношения

$$\omega^k D_{vm} \mathbf{u} \approx 0.5 \left\{ \mathbf{u}(P_0) - [\mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}(P)] / 2 \right\} / \Delta t \quad (3.3)$$

Сначала приведем алгоритм определения неизвестных в точках, принадлежащих граням, параллельным координатным плоскостям, а затем покажем, как быть в общем случае. После подстановки (3.2), (3.3) в (3.1) на «предикторе» вычисляется промежуточное значение вектор-функции

$$\mathbf{q}_0^{(1)} = \mathbf{q}_p^n + \Delta t \left\{ [\Phi(\Delta) \mathbf{g}^n]_p + [\Pi(\Delta) \mathbf{h}^n]_p + \mathbf{e}(\mathbf{f}^n)_p \right\}, \quad (3.4)$$

на корректоре определяется

$$\mathbf{q}_0^{n+1} = 0.5 \left(\mathbf{q}_0^{(1)} + \mathbf{q}_p^n \right) + 0.5 \Delta t \left\{ [\Phi(\nabla) \mathbf{g}^{(1)}]_p + [\Pi(\nabla) \mathbf{h}^{(1)}]_p + \mathbf{e}(\mathbf{f}^{(1)})_p \right\} \quad (3.5)$$

В этих формулах выражения $[\Phi(\Delta) \mathbf{g}^n]_p$ и $[\Pi(\Delta) \mathbf{h}^n]_p$ обозначают аппроксимацию в точке P матриц-операторов Φ и Π с помощью правых конечно-разностных соотношений по формуле (1.8), а выражения $[\Phi(\nabla) \mathbf{g}^{(1)}]_p$ и $[\Pi(\nabla) \mathbf{h}^{(1)}]_p$ означают, что матрицы Φ и Π в точке P аппроксимируются с помощью левых конечно-разностных соотношений по формуле (1.10).

Переходя к точке, находящейся на гранях общего положения, и используя инвариантность СНБ, можно построить решение и для узлов, принадлежащих граням общего положения. Для этого введем локальную правую декартову систему координат $O'X'Y'Z'$ в окрестности искомой точки M так, что направление $O'Z'$ совпадает с направлением внешней нормали в точке M . Два других направления, лежащие в касательной плоскости, выбираются в общем случае неоднозначно. Однако этот произвол вносит ошибку второго порядка малости относительно величины, характеризующей шаг сетки. Тогда выражения (3.4), (3.5) справедливы и в локальной системе, если под каждым значением компоненты тензора деформаций или вектора скоростей в (3.4), (3.5) понимать это значение в локальной системе. Для определения неизвестной вектор-функции в точке M надо все величины, определенные в момент t^n в глобальной системе, выразить в локальной системе координат, используя для этого известные формулы преобразования компонент векторов и тензоров [10]. Будем обозначать индексы их компонент в глобальной системе строчными буквами, а в локальной – прописными. Тогда для вектора \mathbf{u} и тензора $\boldsymbol{\sigma}$ имеем

$$u_K = \alpha_{Kn} u_n \quad (K = 1, 2, 3), \quad \sigma_{KL} = \alpha_{Kn} \alpha_{Ls} \sigma_{ms} \quad (K, L = 1, 2, 3) \quad (3.6)$$

В (3.6) величина $\alpha_{mk} = \cos(e_M, e_k)$, где $e_M, e_k, (M, k = 1, 2, 3)$ – базисные векторы в $O'X'Y'Z'$ и $OXYZ$, соответственно. Затем в локальной системе координат определяются все неизвестные величины по формулам (3.4) и (3.5). Далее, воспользовавшись формулами обратного преобразования векторов и тензоров из локальной системы в глобальную, получаем СНБ в глобальной системе. Наконец, учитывая конкретный тип граничных условий, в общем случае получаем систему алгебраических уравнений для определения неизвестных величин в граничном узле сетки точно так же, как это описано выше для случая границ, параллельных координатным плоскостям. После определения неизвестных величин в локальной системе координат для проведения следующего шага по времени их необходимо выразить в глобальной системе, используя (3.6).

Возвращаясь к особенностям построения решения на ребрах, назовем вершиной точку пересечения нескольких ребер. В теории дифференциальных уравнений в частных производных не требуется задание никаких граничных условий для ребер или вершин. Так, можно доказать [14], что смешанная задача для системы гиперболических уравнений с граничными условиями, заданными только на гладких участках поверхности Γ , и соответствующими начальными условиями, имеет единственное решение.

В [14] также показано, что в окрестности ребер и вершин решение может иметь особенности. Причем если область Ω выпуклая, то особенность будет слабой, если же на Γ есть так называемые входящие двугранные

(и трехгранные) углы, решение будет иметь сильную особенность. Из теории численных методов решения дифференциальных уравнений известно, что скорость сходимости приближенного решения тем выше, чем больше гладкость точного решения. Из этого следует, что для областей с негладкими границами из-за особенностей решения в окрестности ребер скорость сходимости будет только линейно зависеть от характерного размера сетки, и никак не зависит от того, сколь гладко решение вне окрестности ребра. Поэтому, чтобы повысить скорость сходимости, нужно использовать специальные приемы, так или иначе выделяющие особенность решения в окрестности ребер с входящими углами.

Тем не менее, при аппроксимации пространственных производных как для внутренних точек, так и для граней, потребуется определение всех искомых параметров на ребрах. Для решения этого вопроса предлагается следующее. Перемещения, а следовательно, и скорости в силу постановки задачи должны быть непрерывными. Таким образом, если найдены неизвестные компоненты вектора скорости \mathbf{u} на двух гранях Ω_i , имеющих общую границу (ребро) Γ , то

$$\mathbf{u}(\Gamma) \approx [f_e(\mathbf{u}(\Omega_1)) + f_e(\mathbf{u}(\Omega_2))]/2$$

где f_e – оператор экстраполяции. Для нахождения компонент тензора деформации можно тоже воспользоваться экстраполяцией, однако, в отличие от скоростей, в точке на ребре придется определять значение соответствующей компоненты ε слева и справа

$$\varepsilon_+(\Gamma) \approx f_e(\mathbf{u}(\Omega_1)), \quad \varepsilon_-(\Gamma) \approx f_e(\mathbf{u}(\Omega_2))$$

При этом необходимо помнить, что операция экстраполяции понижает точность решения. Другой возможный вариант – использование при аппроксимации пространственных производных только односторонних разностей на «предикторе» и «корректоре». Но этот путь также приводит к потере точности такого же порядка. Какой из двух предложенных вариантов меньше «размазывает» решение, можно установить только в численном эксперименте.

Литература

1. Butler D. S. The numerical solution of hyperbolic systems of partial-differential equations in three independent variables // Proc. Roy. Soc. 1960. V. A255. P. 232–252.
2. Clifton R. J. A difference method for plane problems in dynamic elasticity // Quart. App. Mech. 1967. V. 25. № 1. P. 97–116.
3. Lax P. D., Wendroff B. Systems of conservation laws. III // Commun. Pure and Appl. Math. 1960. V. 13. № 2. P. 1217–1237.
4. Recker W. W. A numerical solution of three-dimensional problems of dynamic elasticity // Trans. ASME. 1970. № 1 P. 116–122.

5. Магомедов К. М., Холодов А. С. Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 1988. 145 с.
6. Глушко А. М., Нещеретов И. И. О поведении решений задач дифракции продольной волны на цилиндрической полости при больших временах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31. № 7. С. 1020–1028.
7. MacCormack R. W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering: AIAA Paper 69–354. Cincinnati, Ohio, 1969. 7 p.
8. Глушко А. И., Нещеретов И. И. О кинетическом подходе к разрушению горных пород // Изв. АН СССР. Механ. твердого тела. 1986. № 6. С. 140–146.
9. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. М.: Физматгиз, 1978. 304 с.
10. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начало тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 427 с.
11. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 1. М.: Физматгиз, 1974. 479 с.
12. Warming R. F., Kutler P., Lomax H. Second- and third order non-centered difference schemes for nonlinear hyperbolic equations // AIAA Journal 1973. V. 11. № 2. P. 189–196. = Уорминг Р. Ф., Катлер П., Ломакс Х. Нецентральные разностные схемы второго и третьего порядка точности для решения нелинейных уравнений гиперболического типа // Ракетная техн. и космонавтика. 1973. Т. 11. № 2. С. 76–85.
13. Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. V. 2. Partial Differential Equations. N.-Y., L.: Intersci. 1962. 836 p. = Курант Р. Уравнения в частных производных. М.: Мир, 1964. 843 с.
14. Grisvard P. Elliptic problems in nonsmooth domains // Monographs and Studies in Math. Boston, 1985. Vol. 24. 422 p.

Комментарии

1. Статья «Об одном численном методе решения смешанных задач для гиперболических систем уравнений на нерегулярной сетке» опубликована в журнале «Журнал вычислительной математики и математической физики», 2001, том 41, № 1. С. 114–125; поступила в редакцию 30.06.1999. Авторы – А. И. Глушко, И. И. Нещеретов.
2. С ссылкой на монографию [5] связана «забавная» история. В монографии излагаются маршевые алгоритмы, использующие соотношения на бихарактеристиках и применяемые для решения задач газовой динамики. При этом аппроксимация соотношений на бихарактеристиках приводит к неявным конечно-разностным схемам. По этой причине ссылка на [5],

первоначально отсутствующая в рукописи, появилась в результате взаимодействия с рецензентом, у которого на недавней защите официальным оппонентом был А. С. Холодов.

3. Относительно ссылки на монографию [13] справедлив комментарий № 3 к главе 4.

Глава 6. Метод решения квазистатических задач для упрочняющихся тел

Модель упрочняющегося упругопластического тела (УУПТ), рассматриваемая в механике твердого деформируемого тела, существенно отличается от других моделей тем, что связь между тензором скоростей деформаций и тензором напряжений и его производными (определяющие соотношения) записываются в виде альтернативной системы уравнений и неравенств. С помощью неравенств задается область в пространстве напряжений, где поведение твердого тела описывается законами теории упругости, а также условия нагружения и разгрузки, когда тело находится в пластическом состоянии.

Формально систему определяющих соотношений можно привести к некоторой системе уравнений с разрывными коэффициентами. В связи с этим известный прием линеаризации нелинейных уравнений, которым обычно пользуются, чтобы получить конечномерную аппроксимацию определяющих соотношений, неприменим. Во многих работах, в которых исследуется этот вопрос, используется процедура коррекции напряжений, предложенная Уилкинсом [1, 2].

Поясним суть этой процедуры на примере идеально пластического тела с условием текучести Мизеса, когда поверхность текучести в пространстве главных напряжений представляет собой цилиндр. Вычисление напряжений в каждой точке тела на следующем шаге по времени можно представить в виде такого алгоритма. Сначала вычисляются с помощью закона Гука приращения напряжений $\Delta\sigma$ по приращениям деформаций. Затем вычисляются напряжения на следующем шаге как сумма $\Delta\sigma$ и значений напряжений в данный момент времени. Если вычисленные таким образом напряжения σ' выходят за предел текучести, т. е. лежат вне цилиндра, то следует сделать коррекцию напряжений. С этой целью из точки σ' опускают перпендикуляр на поверхность текучести и находят точку их пересечения. Напряжения, соответствующие этой точке, и принимаются за напряжения, соответствующие следующему шагу времени. С. С. Григорян в примечании к работе [1] показал, что можно получить те же самые значения напряжений на следующем шаге по времени, если исходить из конечно-разностной аппроксимации уравнений Прандтля – Рейсса. Тем самым процедура коррекции напряжений получила строгое обоснование для идеально пластических тел с условием текучести Мизеса.

Подобный анализ для УУПТ, насколько известно авторам, не проводился. Однако благодаря своей простой геометрической интерпретации процедура коррекции напряжений стала довольно часто применяться для решения многих практических задач УУПТ.

С физической точки зрения этот прием представляется вполне обоснованным. Вместе с тем возникает естественный вопрос, нельзя ли найти другой подход, в котором операция проектирования на замкнутое множество в шестимерном пространстве напряжений, которой, по существу, является процедура коррекции, вытекала бы естественным образом из математической постановки задачи и была строго обоснована.

В настоящей работе речь пойдет об одном из таких подходов [3]. Он основан на вариационной формулировке эволюционных задач, моделирующих квазистатические процессы деформирования УУПТ, при описании которых, как известно, можно пренебречь инерционными членами в уравнениях движения. В дальнейшем будем для краткости также называть такие эволюционные задачи «квазистатическими». Суть этого метода кратко может быть представлена следующим образом. Исходная задача записывается в виде двух вариационных неравенств: одно в пространстве напряжений, другое – в пространстве скоростей. Отрезок времени, на котором строится решение, разбиваем на конечное число интервалов. Для каждого момента времени аппроксимируем компоненты вектора скорости и тензора напряжений с помощью соответствующих пространств конечных элементов. Производные по времени аппроксимируются конечно-разностными соотношениями и с исходной системой вариационных неравенств сопоставляются два неравенства в конечномерном пространстве.

Решение этой системы вариационных неравенств строится с помощью итерационного алгоритма Удзавы для нахождения седловых точек нелинейных функционалов. Главное достоинство данного алгоритма состоит в том, что определение двух неизвестных величин сводится к попеременному определению то одной величины, то другой. Можно показать (см. приложение), что этот итерационный процесс сходится к решению конечномерной задачи. Более того, решение конечномерной задачи сходится к решению исходной вариационной задачи. Чтобы определить тензор напряжений на каждой итерации, можно воспользоваться двумя способами. Один способ определения напряжений базируется на эквивалентности вариационного неравенства задаче минимизации квадратичной функции на замкнутом выпуклом множестве. Другой способ, предлагаемый в данной работе, приводит к решению нелинейного уравнения методом последовательных приближений, причем при определении каждой итерации используется операция проектирования на поверхность нагружения.

Работа [3] является одной из последних из серии работ этого автора, посвященных доказательству теорем существования и построению численных методов решения квазистатических задач теории идеально пластических тел и УУПТ. Она отличается от других работ этой серии излишней сжатостью изложения, что затрудняет понимание ряда утверждений. Кроме того, в ней

имеется ряд опечаток, которые делают непонятными отдельные математические выкладки при доказательствах теорем и предложений. Одна из целей настоящей работы – дать по возможности полное изложение и исправить опечатки в той части, которая касается построения приближенного метода и доказательства его сходимости.

1. Математическая модель упрочняющихся упругопластических тел. Введем некоторые обозначения. Будем рассматривать пространство симметричных тензоров второго ранга как шестимерное евклидово пространство со скалярным произведением

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) \equiv \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} = \sigma_{ij} \tau_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

Линейные операторы в этом пространстве записываются с помощью тензоров четвертого ранга \mathbf{A} по формуле

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} \Leftrightarrow \varepsilon_{ij} = A_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3$$

Ниже будем рассматривать тензор четвертого ранга $\mathbf{A} = \{A_{ijkl}\}$, характеризующий только упругое поведение среды, т. е. такое, при котором деформации обратимы. Он обладает свойством симметрии и положительной определенности

$$A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{klij}, \quad (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}) \geq \alpha(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}), \quad \alpha > 0$$

Для изотропного тела компоненты тензора \mathbf{A} представляются в виде

$$A_{ijkl} = -\nu \delta_{ij} \delta_{kl} / E + (1 + \nu) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) / 2E$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, δ_{ij} – символ Кронекера. Обозначим через $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x)$ и $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(x)$ поля скоростей и напряжений, соответственно. Компоненты тензора скоростей деформаций $\mathbf{e}(\mathbf{v})$ имеют вид

$$e_{ij}(\mathbf{v}) = (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i) / 2$$

Перейдем к формулировке математической модели, описывающей поведение определяющих соотношений УУПТ. Будем исходить из того, что задано некоторое начальное состояние (начальная конфигурация) твердого тела, в котором внутренние напряжения обращаются в нуль. Далее будем считать, что в шестимерном пространстве напряжений задано некоторое семейство областей упругого поведения твердого тела: при любых напряжениях внутри этих областей процесс деформирования обратим, и связь между тензорами напряжений и деформаций задается законом Гука. Граница областей называется поверхностью нагружения. В теории УУПТ считается, что семейство поверхностей нагружения задается с помощью некоторых величин, которые называются параметрами упроч-

нения. Эти параметры при обратимых процессах остаются неизменными. В общем случае уравнение поверхности нагружения записывается в виде

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \chi, T, \mu) = 0$$

Здесь $\chi = \{\chi_1, \dots, \chi_l\}$ – параметры упрочнения, $\mu = \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ – некоторое число параметров иной физико-химической природы, T – температура. При $F(\boldsymbol{\sigma}, \chi, T, \mu) < 0$ тело ведет себя упруго. Выбор той или иной величины в качестве параметров упрочнения опирается на физические соображения.

Поведение многих практически важных деформируемых твердых тел можно описать с помощью двух частных моделей: модели изотропного УУПТ и модели трансляционного УУПТ.

В первом случае уравнение поверхности нагружения имеет вид

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \chi, T) = f(\boldsymbol{\sigma}, T) - H(\chi, T) = 0$$

Здесь χ – параметр упрочнения, который должен монотонно возрастать при необратимых процессах, функция $H = H(\chi, T)$ монотонно возрастает при увеличении χ и называется пределом нагружения. В качестве такого параметра можно принять величину «пластической» работы χ^p (Тэйлор, Куини, Шмидт) или параметр Одквиста χ^o

$$\chi^p = \int (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}^p) / f(\boldsymbol{\sigma}, T) dt, \quad \chi^o = \int (\mathbf{e}^p : \mathbf{e}^p)^{1/2} dt$$

который является мерой накопления пластических деформаций. Здесь $\mathbf{e}^p = \mathbf{e}(\mathbf{v}) - \mathbf{A} \partial \boldsymbol{\sigma} / \partial t$ – тензор скоростей пластических деформаций.

В случае трансляционного УУПТ уравнение поверхностей нагружения записывается в виде

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \chi, T) = f(\boldsymbol{\sigma} - \chi, T) = 0$$

Здесь параметр упрочнения является тензором второго ранга.

Чтобы вывести определяющие соотношения модели УУПТ, будем следовать термодинамическому подходу [4-7]. В соответствии с этим подходом будем рассматривать компоненты тензора пластических деформаций и параметр упрочнения как внутренние параметры состояния. Далее ограничиваемся рассмотрением изотермических процессов деформирования при малых деформациях. Примем, что свободная (удельная) энергия F зависит от тензора полных деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$, тензора пластических

деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, параметра упрочнения χ , и представляется в виде

$$F = \left(\mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \right) + \gamma \chi^2 / 2, \quad \gamma > 0$$

Далее будем рассматривать тензор скоростей пластических деформаций \mathbf{e}^p ($\mathbf{e}^p \approx \partial \boldsymbol{\varepsilon}^p / \partial t$) и скорость изменения¹ $\partial \chi / \partial t$ параметра упрочнения χ как обобщенные термодинамические потоки и введем обозначение $\Psi = (\mathbf{e}^p, \bar{\chi})$.

Им соответствуют обобщенные термодинамические силы

$$\mathfrak{R} = (\boldsymbol{\sigma}, r) : \mathbf{e}^p \rightarrow \boldsymbol{\sigma}, \quad \partial \chi / \partial t \rightarrow r = \partial F / \partial \chi = \gamma \chi$$

с помощью которых скорость возрастания энтропии за счет необратимых внутренних процессов W представляется в виде

$$W = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}^p + r \bar{\chi} = (\mathfrak{R}, \Psi)$$

Чтобы установить определяющие соотношения для УППТ, будем исходить из гипотезы нормальности диссипации [8]. Согласно этой гипотезе для любой упругопластической среды можно задать функцию диссипации $\varphi = \varphi(\mathbf{e}^p, \bar{\chi})$, с помощью которой связь между обобщенными термодинамическими силами \mathfrak{R} и потоками Ψ устанавливается в виде:

$$\mathfrak{R} \in \partial \varphi \tag{1.1}$$

Здесь $\partial \varphi(\mathbf{e}^p, \bar{\chi})$ – субдифференциал [7–9] функции φ . В случае гладкой функции субдифференциал $\partial \varphi(\mathfrak{R}) = (\partial \varphi / \partial \mathbf{e}^p, \partial \varphi / \partial \bar{\chi})$ является градиентом функции. Функция φ должна быть выпуклой и полунепрерывной снизу [6, 8]. В этом случае будет удовлетворено неравенство Клаузиуса – Дюгема, которое эквивалентно второму началу термодинамики – закону возрастания энтропии при необратимых процессах [4–5]. Если ввести преобразование Лежандра – Фенхеля $\varphi^* = \varphi^*(\mathfrak{R})$ от функции $\varphi(\Psi)$ по формуле

$$\varphi^*(\mathfrak{R}) = \sup_{\Psi} ((\mathfrak{R}, \Psi) - \varphi(\Psi)) = \sup_{t,s} (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{t} + rs - \varphi(\mathbf{t}, s))$$

где $\mathbf{t} = \mathbf{e}^p, s = \bar{\chi}$, то соотношение (1.1) можно обратить и записать в виде [9]

$$(\mathbf{e}^p, \bar{\chi}) \in \partial \varphi^*(\mathfrak{R}) \tag{1.2}$$

Преобразование Лежандра – Фенхеля является обобщением преобразования Лежандра [10] на случай бесконечномерных нормированных пространств. В случае конечномерных евклидовых пространств нетрудно

¹ Далее $\partial \chi / \partial t$ будем обозначать как $\bar{\chi}$.

показать, что для дифференцируемых функций оно совпадает с преобразованием Лежандра.

В теории УППТ в качестве функции $\varphi^* = \varphi^*(\mathfrak{R})$ берется индикаторная функция

$$g_B(\mathfrak{R}) = \begin{cases} 0, & \mathfrak{R} \in B \\ \infty, & \mathfrak{R} \notin B \end{cases}$$

замкнутого выпуклого множества B , внутри которого поведение тела описывается законами упругости. В этом случае соотношения (1.2) эквивалентны неравенству

$$(\mathbf{e}^p : (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})) - \gamma \bar{\chi} (\eta - \chi) \leq 0, \quad \forall (\eta, \chi) \in B$$

Именно это неравенство принимается ниже в качестве определяющего соотношения. Заметим, что в ряде работ [11–15] используются другие принципы, позволяющие получать определяющие соотношения: принцип максимальной диссипации Мизеса, постулат Дракера или ассоциированный закон течения [16], причем в качестве параметра упрочнения принимаются упоминавшиеся выше параметры Тейлора – Куини – Шмидта или Одквиста. Можно показать, что предлагаемая формулировка (1.2) согласуется с постулатом Дракера и дает более общую связь между скоростью изменения параметра упрочнения $\bar{\chi}$ и параметрами состояния $\mathfrak{R} = (\boldsymbol{\sigma}, \chi)$.

2. Постановка математической задачи. Будем считать, что упрочнение характеризуется одним параметром упрочнения χ , и будем рассматривать совместно тензор напряжений и параметр упрочнения как точку в семимерном пространстве $(\boldsymbol{\sigma}, \chi) \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}$. Введем в этом пространстве замкнутое выпуклое множество с помощью соотношения

$$B := \{(\boldsymbol{\sigma}, \chi) \mid F(\boldsymbol{\sigma}, \chi) \leq 0\}$$

В точках множества B , где выполняется неравенство $F(\boldsymbol{\sigma}, \chi) < 0$, поведение твердого тела описывается законами упругости. Соответственно введем функциональное пространство $H := \{(\boldsymbol{\sigma}, \chi)\}$. Множество допустимых пар полей напряжений $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(x)$ и параметра упрочнения $\chi = \chi(x)$ задается с помощью соотношения

$$P := \{(\boldsymbol{\sigma}, \chi) \in H \mid (\boldsymbol{\sigma}(x), \chi(x)) \in B, \forall x \in \Omega\}$$

Перейдем к математической формулировке задачи. Будем считать, что на части границы $\Gamma_{\text{н}}$ области Ω заданы нулевые перемещения, а на

части Γ_σ – заданы внешние усилия $P_N, \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \partial\Omega$ ($\partial\Omega$ – граница области Ω).

Заметим, что с помощью стандартного приема можно рассмотреть также и случай ненулевых условий на Γ_u .

При постановке задачи будем исходить из вариационной формулировки определяющих соотношений. Обозначим через V множество допустимых полей скоростей, т. е. таких полей, которые обращаются в нуль на поверхности Γ_u . Задача может быть сформулирована следующим образом.

Задача 1. Найти поля скоростей $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x) \in V$, напряжений $\boldsymbol{\sigma}(x)$ и параметра упрочнения $\chi(x), (\boldsymbol{\sigma}, \chi) \in P$ такие, что выполняется соотношения

$$(\boldsymbol{\sigma} : e(\mathbf{w})) - (P_N, \mathbf{w})_S = (g, \mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{w} \in B, \quad \sigma(0, x) = \sigma_0(x)$$

$$\left(\left(e(\mathbf{v}) - A \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} \right) : (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}) \right) - \frac{\partial \chi}{\partial t} (\eta - \chi) \leq 0, \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, \eta) \in P$$

Здесь первое соотношение – вариационное неравенство – следует из уравнений равновесия и называется принципом виртуальных работ, g – плотность распределенных сил, $(P_N, \mathbf{w})_S$ – интеграл по поверхности Γ_σ , P_N – усилие на поверхности Γ_σ , $\sigma_0(x)$ – некоторая заданная функция.

Ниже главное внимание будет уделено построению численного решения сформулированной выше задачи с помощью метода конечных элементов. С этой целью рассмотрим соответствующую задачу в конечномерном пространстве, аппроксимируя функциональные пространства V и H пространствами конечных элементов V_h и H_h и заменяя производную по времени конечноразностным соотношением.

Будем строить решение на отрезке $[0, T]$; разобьем его на N частей, обозначим через Δ шаг по времени, $\Delta = T/N, t_n = n\Delta, n = 1, 2, \dots, N$. Далее в области Ω введем триангуляцию $T_h = \cup_v T_v^h$. Здесь $T_v^h, v = 1, \dots, M$ – треугольник из разбиения области Ω, M – число треугольников. Предполагается, что триангуляция удовлетворяет обычным условиям регулярности [17].

Аппроксимируем пространство V с помощью пространства кусочно-линейных функций V_h , а пространство H – с помощью пространства кусочно-постоянных функций H_h . Множество P заменим множеством

$$P_h = P \cap H_h$$

Всякий элемент $\bar{\sigma}_h$ пространства H_h может быть представлен в виде

$$\bar{\sigma}_h(x) = \sum_{v=1}^k \bar{\sigma}_v \theta_v(x), \quad \bar{\sigma}_v = (\sigma_v, \chi_v), \quad \theta_v(x) = \begin{cases} 1, & x \in T_v^h, \\ 0, & x \notin T_v^h \end{cases}$$

Здесь k – число элементов разбиения, $\theta_v(x)$ – характеристическая функция элемента T_v^h .

Скалярное произведение любых двух элементов $\bar{\sigma}_h, \bar{\tau}_h \in H_h$ представляется в виде суммы

$$(\bar{\sigma}_h, \bar{\tau}_h) = \sum_{v=1}^k (\bar{\sigma}_v, \bar{\tau}_v) |T_v^h|$$

Здесь $|T_v^h|$ – мера конечного элемента T_v^h , $(\bar{\sigma}_v, \bar{\tau}_v) = (\bar{\sigma}_v; \bar{\tau}_v) + \chi_v \eta_v$, если $\bar{\sigma}_v = (\sigma_v, \chi_v)$, $\bar{\tau}_v = (\tau_v, \eta_v)$. Приведем также формулу, с помощью которой вычисляется расстояние $d_B(\bar{\sigma})$ от любой точки $\bar{\sigma}_h = (\sigma, \chi) \in H_h$ до множества P_h

$$d_B(\bar{\sigma}_h) = \min_{(\tau_v, \eta_v) \in B} \sqrt{\sum_{v=1}^k (|\sigma_v - \tau_v|^2 + |\chi_v - \eta_v|^2) |T_v^h|}$$

3. Аппроксимация точного решения. Теперь сформулируем следующую задачу в конечномерном пространстве $V_h \times H_h$.

Задача 2. Найти последовательности $v^n \in V_h, (\sigma^n, \chi^n) \in P_h$, $n = 1, 2, \dots, N$, такие, что выполняются соотношения

$$\begin{aligned} (e(v^n) - A(\sigma^n - \sigma^{n-1})) / \Delta : (\tau - \sigma^n) - \gamma(\chi^n - \chi^{n-1})(\eta - \chi^n) / \Delta &\leq 0, \\ (\sigma^n; e(w)) - (g, w) - (P_N, w)_S &= 0, \quad \forall (\tau, \eta) \in P_h, \forall w \in V_h \end{aligned} \quad (3.1)$$

с начальными условиями $\sigma(0, x) = \sigma_0(x)$.

Если при $t = t_{n-1}$ известны величины $(\sigma^{n-1}, \chi^{n-1})$, то (σ^n, χ^n) и v^n могут быть определены из решения вариационной задачи 2. Чтобы получить приближенное решение задачи 1 при любом $t \in [0, T]$, интерполируем линейно на каждом отрезке времени $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \dots, N$, значения v^{k-1}, v^k , а также σ^{k-1}, σ^k и χ^{k-1}, χ^k . Введем обозначение $\bar{\sigma}^n = (\sigma^n, \chi^n)$. Тогда неизвестные v^n и $\bar{\sigma}^n$ можно рассматривать как координаты в прямом произведении

пространств $V_h \times H_h$. Можно показать, что задача 2 эквивалентна нахождению седловой точки функционала

$$L(\bar{\sigma}, w) = \left[\left(A(\sigma^n - \sigma^{n-1}) : \sigma \right) + \gamma(\chi^n - \chi^{n-1})\chi \right] / (2\Delta) - (e(w) : \sigma) + (g, w) + (P_N, w)_S$$

выпуклого по переменной $\bar{\sigma}$ и вогнутого по переменной w .

Напомним, что точка $(\bar{\sigma}_0, w_0)$ называется седловой точкой функционала $L(\bar{\sigma}, w)$, если выполняются условия

$$L(\bar{\sigma}, w_0) > L(\bar{\sigma}_0, w_0) > L(\bar{\sigma}_0, w)$$

Для дифференцируемых функционалов эти условия эквивалентны вариационным неравенствам

$$\left(\frac{\partial L(\bar{\sigma}_0, w_0)}{\partial \bar{\sigma}} : (\bar{\tau} - \bar{\sigma}_0) \right) \geq 0, \quad \forall \bar{\tau} \in P_h, \quad \left(\frac{\partial L(\bar{\sigma}_0, w_0)}{\partial w} : (w - w_0) \right) \leq 0, \quad \forall w \in V_h \quad (3.2)$$

Если выполнить здесь все преобразования и подставить $\bar{\sigma}^n$ и v^n вместо $\bar{\sigma}_0$ и w_0 , то получим в точности вариационную задачу 2. Учитывая это, перейдем к построению итерационной процедуры, которая позволит найти седловую точку функционала $L(\bar{\sigma}, w)$ и тем самым получить численное решение задачи 2.

4. Алгоритм приближенного решения. Будем искать седловую точку функционала $L = L(\bar{\sigma}, w)$ с помощью алгоритма Удзавы. Он состоит в том, что строятся две сходящиеся последовательности $\{\bar{\sigma}_j^n\}$ и $\{v_j^n\}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяющие следующим условиям

$$\left[\left(A(\sigma_j^n - \sigma^{n-1}) : (\tau - \sigma_j^n) + \gamma(\chi_j^n - \chi^{n-1})(\eta - \chi_j^n) \right) \right] / \Delta - (e(v_{j-1}^n) : (\tau - \sigma_j^n)) \geq 0, \quad \forall (\tau, \eta) \quad (4.1)$$

$$(e(v_j^n) : e(w)) = (e(v_{j-1}^n) : e(w)) + \rho \left[(g^n, w) - (e(w) : \sigma_j^n) + (P_N, w)_S \right], \quad \forall w \in V_h \quad (4.2)$$

Здесь $\rho > 0$ – параметр, оценка которого будет дана ниже в приложении.

Этот алгоритм можно представить схематически в виде построения следующей последовательности (v_0^n берется произвольно из множества допустимых):

$$v_0^n \rightarrow \bar{\sigma}_1^n \rightarrow v_1^n \rightarrow \bar{\sigma}_2^n \rightarrow \dots \rightarrow v_j^n \rightarrow \bar{\sigma}_{j+1}^n \rightarrow v_{j+1}^n \rightarrow$$

Члены последовательности σ_j^n определяются из вариационного неравенства (4.1) при известном v_{j-1}^n , а члены последовательности v_j^n – из вариационного равенства (4.2) при известном σ_j^n . Можно показать (см. пункт б), что при $\rho < 2\alpha/\Delta$ последовательность $\bar{\sigma}_j^n$ сходится к $\bar{\sigma}^n$ при $j \rightarrow \infty$. Таким образом, алгоритм Удзавы сводит решение нелинейной задачи 2 для неизвестных $\bar{\sigma}^n$, v^n к последовательному определению величин $\bar{\sigma}_j^n$ и v_j^n .

Перейдем к определению σ_j^n из вариационного неравенства (4.2). Эту задачу, в свою очередь, можно свести к задаче минимизации квадратичной функции на замкнутом выпуклом множестве P_h . Более того, так как каждая тензор-функция и множество P_h постоянны на каждом треугольнике T_v^h , то нахождение σ_j^n сводится к последовательному решению задач минимизации на замкнутом выпуклом множестве $B \subset \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}$ для каждого треугольника T_v^h .

Можно воспользоваться также другим методом. Он основан на том, что вариационное неравенство (4.2) эквивалентно нелинейному уравнению

$$x = \pi_p \left\{ x - \bar{\rho} \left[\bar{A}(x - \bar{\sigma}^{n-1}) / \Delta - \bar{e}(v_{j-1}^n) \right] \right\}, \quad \bar{A} = \begin{Bmatrix} A & 0 \\ 0 & \gamma \end{Bmatrix}, \quad \bar{e} = \begin{Bmatrix} e(v) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Здесь $x = \bar{\sigma}_j^n$, $\bar{\rho}$ – итерационный параметр, $\pi_p = \pi_p(\bar{\sigma})$ – оператор проектирования на замкнутое выпуклое множество P_h . Напомним, что $\pi_p(\bar{\sigma})$ является проекцией вектора $\bar{\sigma}$ на множество P_h , если выполняется условие

$$\|\bar{\sigma} - \pi_p(\bar{\sigma})\| = \min_{\bar{\tau} \in P_h} \|\bar{\sigma} - \bar{\tau}\|$$

Если множество P_h замкнуто и выпукло, то такой элемент $\pi_p(\bar{\sigma})$ существует и единственен. Решение нелинейного уравнения (4.3) строится методом последовательных приближений. Определяется последовательность $\{\bar{\sigma}_l\}$ ($l = 1, 2, \dots$) где $\bar{\sigma}_l$ вычисляется по формуле

$$\bar{\sigma}_l = \pi_p \left\{ \bar{\sigma}_{l-1} - \bar{\rho} \left[A(\bar{\sigma}_{l-1} - \bar{\sigma}^{n-1}) / \Delta - e(v_{j-1}^n) \right] \right\} \quad (4.4)$$

Так как напряжения и параметр упрочнения кусочно постоянны, оператор проектирования действует на множестве $B \subset \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}$ для каждого треугольника T_v^h разбиения. Последовательность $\{\bar{\sigma}_l\}$ сходится при $l \rightarrow \infty$, $\bar{\sigma}_l \rightarrow \bar{\sigma}_j^n$. Если задать точность с помощью некоторого числа $\delta, 0 < \delta < 1$, то итерационный процесс закончится при некотором \bar{l} , и тогда можно при-

нять $\bar{\sigma}_j^n \approx \bar{\sigma}_j$. Из соотношения (4.2) определяется v_j^n . Эта задача эквивалентна решению линейной системы алгебраических уравнений, причем матрица коэффициентов этой системы одна и та же при любых значениях n и j . Тогда представляется рациональным вычислить обратную матрицу и определять все V_j^n с помощью операции умножения одной и той же матрицы на вектор, который зависит от номеров j и n .

5. В качестве примера рассмотрим одномерную задачу о квазистатическом деформировании изотропной цилиндрической трубы под действием равномерно распределенной нагрузки $P_0(t)$, приложенной к внутренней поверхности трубы. Будем рассматривать движение трубы в цилиндрической системе координат r, φ . В этом случае отличны от нуля только одна компонента вектора скорости $u = u_r$, две компоненты тензора скоростей деформаций $e_r = \partial u / \partial r$ и $e_\varphi = u / r$, и три компоненты тензора напряжений: $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$. Тензор $A\sigma$ также имеет три отличные от нуля компоненты

$$(A\sigma)_\xi = (1 + \nu) \left[\sigma_\xi / E - (\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z) / 3 \right], \quad \xi = r, \varphi, z \quad (5.1)$$

Билинейная форма $A = A(\sigma, \tau)$ в этом случае записывается следующим образом:

$$A(\sigma, \tau) = \frac{1 + \nu}{E} \int_{r_1}^{r_2} r \left(\sigma_r \tau_r + \sigma_\varphi \tau_\varphi + \sigma_z \tau_z - \frac{\nu}{1 + \nu} (\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z) (\tau_r + \tau_\varphi + \tau_z) \right) dr$$

Вариационное равенство (4.2) можно привести к следующему виду

$$\int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v_j w}{r^2} \right) r dr = P_0(t) - \int_{r_1}^{r_2} \left(\sigma_r^n \frac{\partial w}{\partial r} + \sigma_\varphi^n \frac{w}{r} \right) r dr, \quad v_j = v_j^n - v_{j-1}^n \quad (5.2)$$

Переходя к итерационной процедуре решения конечномерной задачи, введем на отрезке $[1, r]$ сетку Δ_h , т. е. разбиение отрезка на n частей с узлами $1 = r_0 < r_1 < \dots < r_n = r$. На сетке Δ_h задается пространство кусочно-линейных функций V_h и пространство H_h кусочно-постоянных тензорных полей $\sigma_h = (\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z)_h \in H_h$. Очевидно, что любой элемент из V_h однозначно определяется с помощью $n+1$ значений скорости в узлах сетки, а любой элемент из H_h однозначно определяется с помощью $3n$ значений тензора напряжений на каждом отрезке разбиения.

Из вариационного равенства (5.2) следует система уравнений, позволяющая определить неизвестные значения скоростей в узлах сетки. Можно показать, что матрица этой системы симметричная диагональная и обладает свойством преобладания диагональных элементов. Поэтому для решения системы целесообразно воспользоваться методом прогонки, который, как хорошо известно, устойчив и эффективен. Если учесть, что матрица этой системы не зависит от номера итерации, а также от параметров ρ и $\bar{\rho}$, то можно полагать, что предложенный алгоритм также будет устойчив и эффективен.

Тензор напряжений на каждой итерации определяется из соотношения (4.4). Условно вычисления можно разбить на два этапа: вычисление величины, стоящей в фигурных скобках в формуле (4.4) и проектирование этой величины на множество $P_h = H_h \cap P$.

Как отмечалось выше, второй этап сводится к решению задачи нелинейного программирования на каждом элементе сетки в пространстве переменных $(\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \chi)$. Для решения этой задачи разработаны эффективные численные методы [18, 19]. Заметим, что второй этап – наиболее трудоемкая часть алгоритма решения квазистатической задачи. Предлагаемый способ представляет собой один из возможных способов решения вариационных неравенств. Можно воспользоваться и другими методами, однако любой из них так или иначе сводит решение вариационного неравенства к некоторой итерационной процедуре.

Метод, связанный с операцией проектирования, был здесь выбран лишь с той целью, чтобы получить возможность сопоставить этот способ с другими методами, где используется процедура коррекции напряжений. Рассмотренный способ решения вариационного неравенства (4.1) имеет строгое обоснование, однако число итераций, за которое может быть построено решение задачи нелинейного программирования, зависит от задаваемой точности. Этим рассмотренный способ отличается от других способов, основанных на процедуре коррекции напряжений, где сама процедура состоит из некоторого, заранее известного числа заданных действий.

6. Покажем, что итерационный процесс, построенный с помощью алгоритма Удзавы, сходится к решению конечномерной задачи. С этой целью в неравенстве (3.1) возьмем в качестве пробной функции $\tau = \bar{\sigma}_j^n$, а в неравенстве (4.1) $\tau = \bar{\sigma}^n$, и затем сложим оба неравенства.

Получим

$$\left[(\bar{\sigma}_j^n - \bar{\sigma}^n), (\bar{\sigma}^n - \bar{\sigma}_j^n) \right] - \Delta \left(e(v_{j-1}^n - v^n) : (\sigma^n - \sigma_j^n) \right) \geq 0 \quad (6.1)$$

Первое слагаемое в левой части неравенства (6.1) представляет собой скалярное произведение, ассоциированное с симметричной билинейной нормой

$$[\bar{\sigma}, \bar{\tau}] = (A\sigma, \tau) + \chi\gamma\eta, \quad \bar{\sigma} = (\sigma, \chi), \quad \bar{\tau} = (\tau, \eta)$$

Связанную с ним норму будем обозначать через $\langle \bar{\sigma} \rangle \equiv [\bar{\sigma}, \bar{\sigma}]^{1/2}$. Далее умножим второе уравнение (3.1) на ρ и вычтем из него соотношение (4.2). Обозначим $w_{j-1} = v_{j-1}^n - v$ и в качестве пробной функции w возьмем $w_j = v_j^n - v^n$. Тогда получим

$$\begin{aligned} (e(w_j) : e(w_j)) &= (e(w_{j-1}) : e(w_j)) + \rho((\sigma^n - \sigma_j^n) : e(w_j)) = \\ &= ((e(w_{j-1}) + \rho(\sigma^n - \sigma_j^n)) : e(w_j)) \leq \|e(w_{j-1}) + \rho(\sigma^n - \sigma_j^n)\| \|e(w_j)\| \end{aligned}$$

Последняя оценка следует из неравенства Коши. Сокращая обе части неравенства на общий множитель, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \|e(w_j)\|^2 &\leq \|e(w_{j-1}) + \rho(\sigma^n - \sigma_j^n)\|^2 = \\ &= \|e(w_{j-1})\|^2 + \rho^2 \|\sigma^n - \sigma_j^n\|^2 + 2\rho(e(w_{j-1}) : (\sigma^n - \sigma_j^n)) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Последнее слагаемое в правой части можно исключить, если воспользоваться неравенством (6.1). Умножив неравенство (6.1) на $2\rho/\Delta$, и сложив результат с равенством (6.2), получим

$$\begin{aligned} \|e(w_j)\|^2 + \frac{2\rho}{\Delta} \langle \sigma^n - \sigma_j^n \rangle^2 &\leq \|e(v_{j-1}^n - v^n)\|^2 + \rho^2 \|\sigma^n - \sigma_j^n\|^2 \leq \\ &\leq \|e(w_{j-1})\|^2 + \frac{\rho^2}{\alpha} \langle \sigma^n - \sigma_j^n \rangle^2 \end{aligned}$$

так как $\|\sigma^n - \sigma_j^n\|^2 \leq \langle \bar{\sigma}^n - \bar{\sigma}_j^n \rangle^2 / \alpha$. Приведем теперь подобные члены и просуммируем по j от единицы до некоторого M . Переходя от функций w_{j-1}, w_j к функциям v_{j-1}^n, v_j^n , получим

$$\left(\frac{2\rho}{\Delta} - \frac{\rho^2}{\alpha} \right) \sum (M) + \|e(w_M)\|^2 \leq \|e(w_0)\|^2, \quad \sum (M) = \sum_{j=1}^M \langle \bar{\sigma}^n - \bar{\sigma}_j^n \rangle^2$$

Выберем ρ так, чтобы множитель перед знаком суммы был положительным, т. е. $\rho < 2\alpha/\Delta$. Тогда из последнего неравенства будет следовать, что ряд $\sum (M)$ сходится, и значит, $\langle \bar{\sigma}^n - \bar{\sigma}_j^n \rangle \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, что и доказывает сходимость итерационного процесса к решению конечномерной задачи.

Литература

1. Wilkins M. L. Calculation of elastic-plastic flow // *Methods in computational physics. Volume 3. Fundamental Methods in Hydrodynamics*. Eds. Alder B. and oth. Academic press. N.-Y.-L. 1964. P. 211–264. = Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений // *Вычислительные методы в гидродинамике*. Ред. Б. Олдер и др. М.: Мир, 1967. С. 212–263.
2. Owen D.R., Hinton E. *Finite elements in plasticity*. N.-Y.: McGraw-Hill, 1980. 594 p.
3. Johnson C. A mixed finite element method for plasticity problems with hardening // *SIAM J. Numer. Anal.* 1977. V. 14. P. 575–584.
4. Бурого Н. Г., Глушко А. И., Ковшов А. Н. Термодинамический метод получения определяющих уравнений для моделей сплошных сред // *Изв. РАН. МТТ*, 2000. № 6. С. 4–15.
5. Седов Л. И. Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы // *ПММ*. 1968. Т. 32. Вып. 5. С. 771–785.
6. Halphen B., Nguyen Quoc Son. Sur les matériaux standards généralisés // *J. Мéc.* 1975. V. 14. № 1. P. 39–63.
7. Eve R. A., Reddy B. D., Rockafellar R. T. An internal variable theory of elastoplasticity based on the maximum plastic work inequality // *Quart. Appl. Math.* 1990. V. 48. № 1. P. 59–83.
8. Moreau J. J. Sur le lois de frootterment, de plasticité et de viscosité // *C. r. Acad. sci. Ser. A et B*. 1970. T. 217. № 13. P. A608–A611.
9. Ekeland I., Temam R. *Convex Analysis and Variational Problems*. Amsterdam etc. North Holland, 1976. 409 p. = Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и его применения. М.: Мир, 1979. 399 с.
10. Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics. V. 2. Partial Differential Equations*. N.-Y., L.: Intersci. 1962. 836 p. = Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
11. Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. *Теория упрочняющегося пластического тела*. М.: Наука, 1971. 231 с.
12. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. *Математическая теория пластичности*. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
13. Работнов Ю. Н. *Механика деформируемого твердого тела*. М.: Наука, 1979. 744 с.
14. Седов Л. И. *Механика сплошных сред. Т. 2*. М.: Наука, 1976. 576 с.
15. Hill R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford: Clarendon Press, 1950. 355 p. = Хилл Р. *Математическая теория пластичности*. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.

16. Drucker D. C. A definition of stable inelastic material // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1959. V. 26. № 1. P. 101–106.
17. Ciarlet Ph. The Finite Element Method for Elliptic Problems. Amsterdam etc. North Holland, 1978. 548 p. = Сьярле Ф. Метод конечных элементов для решения эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.
18. Bazaraa M. S., Shetty C. M. Nonlinear Programming. Theory and Algorithms. N.-Y. etc.: Wiley, 1977. 574 p. = Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982. 583 с.
19. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. Задачи минимизации в функциональных пространствах, регуляризация, аппроксимация. М.: Наука, 1981. 400 с.

Комментарии

1. Статья «Об одном методе приближенного решения квазистатических задач для упрочняющихся тел» опубликована в журнале «Прикладная математика и механика». 2006. Том: 70 № 1. С. 162–172; поступила в редакцию 04.03.2004. Авторы – А. И. Глушко, И. И. Нецеретов.

2. Процедура коррекции напряжений вводится, чтобы найти приближенное решение уравнения, которому должен удовлетворять тензор напряжений на поверхности текучести. Если обратиться к энергетической формулировке задачи (см., например, Mielke A., Theil F., Levitas V. I. A variational formulation of rate-independent phase transformations using an extremum principle. Arch. Rational Mech. Anal., 2002. V. 162: P. 137–177), то можно заметить, что в этой формулировке не требуется находить решение вышеупомянутого уравнения, так как вместо этого уравнения рассматривается функция диссипации, которая вводится как опорная функция в пространстве напряжений, ограниченных поверхностью текучести.

Глава 7. О кинетическом подходе к разрушению горных пород

Экспериментальным исследованиям разрушения горных пород под действием сжимающих нагрузок при квазистатическом нагружении посвящено большое количество работ (см. [1–3] и приведенную там библиографию). При деформировании горных пород зависимость касательных напряжений от деформаций немонотонна: при увеличении деформаций напряжения возрастают, достигают максимума, а затем убывают. Более того, кривые «деформации – напряжения» зависят от скорости деформирования. Разрушение приводит к разрыхлению среды, т. е. после снятия нагрузок с образца его объем оказывается больше, чем до начала деформирования.

Отметим также изменение скоростей продольных и поперечных волн при разрушении [4]. Опытных данных о поведении горных пород под действием динамических нагрузок существенно меньше. Однако есть основания считать, что указанные свойства горных пород, проявляющиеся при квазистатическом нагружении, присущи поведению горных пород и под действием динамических нагрузок. Тем не менее, в этом случае приходится привлекать дополнительные гипотезы, вытекающие из интуитивных представлений о процессе разрушения. В настоящее время известны два подхода к теории разрушения горных пород при динамическом нагружении: когда переход среды из неразрушенного состояния в разрушенное происходит скачком на фронте разрушения (мгновенное хрупкое разрушение) [5–7]¹ и когда поведение среды при разрушении предлагается описывать моделью упрочняющегося упруго-пластического тела («постепенное» разрушение) [8, 9]. В данной работе предлагается другой подход к описанию процесса разрушения.

1. Будем исходить из кинетических представлений о разрушении горных пород под действием сжимающих напряжений. Известно, что при деформировании горных пород в среде происходит накопление разного рода микродефектов. Закономерности зарождения индивидуальных микротрещин и их развитие в поле сжимающих напряжений к настоящему времени неизвестны. Имеются только статистические данные о скорости изменения общего числа микротрещин и функции распределения по размерам при растяжении [10], которые не могут быть экстраполированы непосредственно на процесс накопления микротрещин при сжатии. Тем не менее, можно попытаться опи-

¹ См. также: Николаевский В. Н. Предельная скорость фронта разрушения и динамические перегрузки хрупких материалов. Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1979, № 123. 57 с.

сать процесс деформирования и разрушения при сжатии феноменологически, опираясь на определенные гипотезы о процессе накопления микродефектов.

Опыты показывают, что плотность микродефектов (число микродефектов в единице объема) велика. Естественно предположить, что в этом случае поведение среды можно описать в рамках сплошной среды. Для количественной характеристики имеющихся в среде дефектов может быть введена величина D , которую назовем повреждаемостью. Предположим, что изменение свойств среды по мере накопления микродефектов может быть охарактеризовано этой величиной. Чтобы определить скорость изменения D , следует принять во внимание следующие опытные наблюдения. Накопление дефектов происходит только при напряжениях, превышающих некоторое критическое значение. Скорость накопления зависит от повреждаемости D , напряжений σ и не зависит от градиентов этих величин, следовательно, скорость изменения повреждаемости должна удовлетворять уравнению

$$\frac{dD}{dt} = \hat{f}(D, \sigma) \quad (1.1)$$

Накопление дефектов приводит к изменению механических характеристик среды, в том числе ее эффективных модулей. В настоящей работе считается, что накопление повреждений и связанное с этим изменение модулей и упругих деформаций – один из основных факторов, определяющих поведение горных пород при деформировании и разрушении.

При этом имеются в виду быстропротекающие процессы, характерное время которых значительно меньше характерного времени процессов ползучести и развитого пластического течения.

2. Будем считать, что при разрушении распределение трещин по направлениям однородно (среда остается изотропной), а внутренняя энергия среды E есть квадратичная функция тензора упругих деформаций ε [11] и параметры Ламе λ и μ зависят от повреждаемости

$$E = 1/2\lambda(D)I_1^2(\varepsilon) + \mu(D)I_1(\varepsilon \cdot \varepsilon)$$

где точка означает операцию свертки, $I_1(\boldsymbol{\eta})$ – первый инвариант тензора $\boldsymbol{\eta}$. Учитывая (1.1), можно получить соотношение

$$\frac{d\mu}{dt} = \hat{f}(D, \sigma) \frac{\partial \mu(D)}{\partial D}$$

Сделаем дополнительное предположение: μ монотонно убывает при возрастании D . В этом случае существует обратная однозначная функция $D = D(\mu)$ и можно получить уравнение (f – некоторая известная функция):

$$\frac{d\mu}{dt} = f(\mu, \sigma) \quad (2.1)$$

которое содержит только μ, σ и не содержит D . При феноменологическом подходе это позволяет положить в основу описания деформирования и разрушения горных пород уравнение (2.1), а не (1.1), явно связывающее накопление дефектов и напряженное состояние среды. Функция $f(\mu, \sigma)$ должна определяться из опытных данных, которых для какого-нибудь конкретного материала в настоящее время нет. Можно, однако, высказать предположение, что функция f может быть аппроксимирована следующим образом:

$$f = -h(\mu)H(\Phi) \left[e_0(\Phi) + \frac{\gamma}{(\gamma + \gamma_0)\tau_1(\Phi)} \right], \quad (2.2)$$

где $h(\mu) > 0, \tau_1 > 0, \gamma$ – второй инвариант девиатора скоростей деформаций, $H(x) = 0$ при $x < 0, H(x) = 1$ при $x \geq 0$. При этом считается, что существует поверхность $\Phi(\sigma) = 0$ (критерий разрушения), такая, что при напряжениях, лежащих в области $\Phi(\sigma) < 0$, накопления повреждаемости не происходит. Естественно принять, что скорость накопления микродефектов тем больше, чем больше напряжения превышают критерий разрушения. Поэтому функция $e_0 = e_0(\Phi)$ должна быть неубывающей $e_0(\Phi) > 0$.

Покажем, как изменяется модуль μ при напряжениях внутри области $\Phi(\sigma) > 0$. При $\gamma \approx 0$ имеем

$$f = -h(\mu) \left[e_0(\Phi) + \gamma/\gamma_0 \tau_1(\Phi) \right]$$

а при $\gamma \gg 0, e_0 \gg 1/\tau_1$

$$f \approx -h(\mu)e_0(\Phi)$$

Следовательно, при малых скоростях деформирования приращение модуля μ линейно связано с приращением деформаций, а при больших γ уравнение (2.1) аналогично уравнениям, описывающим процессы релаксации.

Известно, что по мере накопления дефектов будет изменяться также и модуль λ [4]. Строго говоря, должно быть получено некоторое кинетическое уравнение, определяющее скорость изменения λ . Предположим, что модуль λ однозначно связан с модулем μ , причем функция $\lambda = \lambda(\mu)$ монотонно убывает. В этом случае по мере накопления повреждений скорости продольных и поперечных волн будут уменьшаться.

Обобщая известное в теории пластического течения предположение о том, что тензор скоростей деформаций \mathbf{e} может быть представлен в виде суммы тензоров скоростей упругих \mathbf{e}^e пластических \mathbf{e}^p деформаций, представим \mathbf{e} для сред с повреждаемостью в виде

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p + \mathbf{e}^D \quad (2.3)$$

Здесь $\mathbf{e}^e = d\boldsymbol{\varepsilon}/dt$, слагаемое \mathbf{e}^p отражает факт зависимости кривых деформация – напряжение от скоростей деформирования и может быть представлен в виде [12]:

$$\mathbf{e}^p = [\boldsymbol{\varepsilon} - I_1(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{w}] / \tau_\varepsilon \quad (2.4)$$

где \mathbf{w} – единичный тензор, $\tau_\varepsilon = \tau_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon})$ – время релаксации [12], определяемое из опытных данных. О необходимости наличия слагаемого \mathbf{e}^D в (2.3) говорят следующие факты. При деформировании происходит проскальзывание шероховатых берегов микротрещин относительно друг друга и разрушение неровностей. Образовавшиеся при этом песчинки заполняют пространство между берегами, оказываются значительно прочнее исходного материала, в дальнейшем не разрушаются и препятствуют схлопыванию берегов трещин, вследствие чего и образуется разрыхление. Ясно, что \mathbf{e}^D должен как-то зависеть от $d\mu/dt$ и, учитывая предположение об изотропии процесса разрушения, должен быть шаровым. Примем простейший вид зависимости от $d\mu/dt$:

$$\mathbf{e}^D = \Lambda \mathbf{w} \frac{d\mu}{dt} \quad (2.5)$$

где $\Lambda = \Lambda(D)$ – некоторая функция, определяемая из опытных данных.

Таким образом, \mathbf{e}^D ответствен за накопление повреждений. Подставив (2.4), (2.5) в (2.3), перепишем последнее следующим образом:

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} = \mathbf{e} - [\boldsymbol{\varepsilon} - I_1(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{w}] / \tau_\varepsilon - \Lambda \mathbf{w} \frac{d\mu}{dt} \quad (2.6)$$

В дальнейшем будем использовать (2.6) для определения $d\boldsymbol{\varepsilon}/dt$. Из физических соображений ясно, что при деформировании среды между берегами трещин возникают силы трения, вызывающие диссипацию механической энергии. Диссипация энергии, так же как и силы трения, должна зависеть от величины тензора упругих деформаций и тензора скоростей деформаций. С другой стороны, при статическом напряженном состоянии ($d\boldsymbol{\varepsilon}/dt = 0$) тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ должен определяться только тензором упругих деформаций, если пренебречь влиянием температуры. Учитывая это обстоятельство и опираясь на законы термодинамики, тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ можно представить в виде суммы

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} + \boldsymbol{\tau} \quad (2.7)$$

Здесь тензор \mathbf{s} ассоциируется с деформациями «скелета» среды и выражается через тензор упругих деформаций по формулам:

$$\mathbf{s} = \frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \lambda(D) I_1(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{w} + 2\mu(D) \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.8)$$

Тензор $\boldsymbol{\tau}$, обусловленный силами трения, можно определить, считая,

что он коаксиален тензору скоростей деформаций \mathbf{e} ; тогда главные значения τ_i тензора $\boldsymbol{\tau}$ связаны с главными значениями e_i тензора \mathbf{e} формулами

$$\tau_i = -\alpha(D)I_1(\mathbf{s})\text{sign}(e_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.9)$$

Функцию $\alpha = \alpha(D)$ можно назвать коэффициентом трения. В п. 3 будет показано, что тензор $\boldsymbol{\tau}$, определенный таким образом, обеспечивает диссипацию механической энергии при сжатии, т. е. $I_1(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \geq 0$. Вместо (2.9) можно предложить более простую формулу:

$$\tau_i = -\alpha(D)I_1(\mathbf{s})\text{sign}(\mathbf{e}) \quad (2.10)$$

Заметим, что представление тензора напряжений в виде двух слагаемых (2.7) известно в гидродинамике вязкой сжимаемой жидкости и называется формулой Гиббса [13].

Из принятых предположений получена система определяющих уравнений (2.1), (2.6) – (2.9) модели сплошной среды. Коэффициенты этой системы находятся через функции $f, \Lambda, \tau_\varepsilon, \alpha$ и их производные, определение которых из опытных данных представляет собой самостоятельную задачу. Здесь надо иметь в виду, что для определения функций $f(\mu, \boldsymbol{\sigma}), \Lambda(D)$ недостаточно иметь данные о зависимости напряжений от деформаций. Необходимо провести серии динамических опытов при различных программах нагружения и интенсивностях нагрузок, а затем подвергнуть образцы фрактографическому и, может быть, рентгеноструктурному анализу. Однако к настоящему времени таких данных для какого-нибудь конкретного материала нет. Для решения задач к определяющим уравнениям следует добавить уравнения сохранения импульса – уравнения Эйлера и уравнение сохранения энергии, если учитываются тепловые процессы.

3. Обозначим через η энтропию, ρ – плотность, T – температуру, θ – внешний приток тепла. Тогда из первого закона термодинамики и уравнений (2.1) – (2.9) вытекает, что скорость изменения энтропии (без учета теплопроводности) определяется выражением

$$\rho T \frac{d\eta}{dt} - \theta = r_1 + r_2 + r_3$$

$$\text{где } r_1 = -\alpha I_1(\mathbf{s})(|e_1 + e_2 + e_3|), r_2 = I_1\{\mathbf{s}[\boldsymbol{\varepsilon} - I_1(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{w}/3]\}/\tau_\varepsilon, r_3 = \frac{d\mu}{dt}\left(I_1(\mathbf{s})\Lambda - \frac{\partial E}{\partial \mu}\right)$$

Из (2.9) следует, что $r_1 \geq 0$. Можно также показать [12], что $r_2 \geq 0$. Поэтому, чтобы не нарушался закон возрастания энтропии, достаточно потребовать $r_3 \geq 0$, т. е.

$$I_1(\mathbf{s})\Lambda - \partial E/\partial \mu \leq 0 \quad (3.1)$$

В этом случае будет выполнено неравенство

$$\rho T \frac{d\eta}{dt} - \theta \geq 0$$

Таким образом, только при напряжениях, удовлетворяющих неравенству (3.1), возможен процесс разрыхления.

Согласно (2.6), при $\Lambda > 0$ необратимые объемные деформации положительны и возрастают в процессе разрушения, т. е. модель отражает факт разрыхления среды при разрушении, а разрыхление непосредственно связано с изменением модуля сдвига. Это не случайно, так как само по себе разрыхление не может происходить, если оно не сопровождается каким-либо диссипативным процессом.

4. Система определяющих уравнений сформулирована на основе определенных представлений о характере деформирования и разрушения горных пород. Естественно возникает вопрос, в какой степени предложенная модель отражает реальные свойства среды. Чтобы ответить на этот вопрос, во-первых, нужны новые эксперименты, из которых можно определить входящие в уравнения (2.1) – (2.9) функции и параметры; во-вторых, нужны эксперименты для проверки вытекающих из модели следствий.

Проиллюстрируем свойства модели на примере численного решения одной задачи. Относительно функций $f, \Lambda, \tau_\varepsilon, \alpha$ примем простейшие предположения и зададим их следующим образом:

$$f(\mu, \sigma) = \begin{cases} -\mu e_0, & \Phi > 0, \\ 0, & \Phi \leq 0, \end{cases} \quad \Phi = \frac{1}{2} J - \Phi_0 \quad J = s_{ij} s_{ij} \quad (4.1)$$

$$\Lambda = \Lambda_0, \quad \alpha(D) = f_0, \quad \tau_\varepsilon = \begin{cases} \tau_2, & J > J_0, \\ \infty, & J \leq J_0, \end{cases}$$

Здесь $e_0 = 1/\tau_0, \Phi_0 > 0, \Lambda_0, f_0, J_0$ – постоянные. Хотя из эксперимента следует, что Λ должно стремиться к нулю при $I_1(\mathbf{s}) \gg 1$ [4], но здесь Λ принимается постоянным. Эти упрощения вызваны в первую очередь отсутствием необходимых данных для какого-нибудь конкретного материала. Тем не менее, даже эта упрощенная система не сводится к ранее известным моделям неупругих сред.

Рассмотрим теперь следующую задачу. Пусть имеется полый цилиндрический образец из горной породы. Заполним полость значительно более жестким материалом и затем к внешней поверхности образца приложим переменную нагрузку. Если интенсивность нагрузки достаточно велика, то в породе начинается разрушение.

Опишем характерные особенности процесса разрушения в рамках предложенной модели сплошной среды. Для этого находим функции $u, \varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z$, удовлетворяющие системе определяющих уравнений и граничным условиям (начальные условия – нулевые):

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t &= \partial \sigma_r / \partial r + (\sigma_r - \sigma_\varphi) / r, & \partial \mu / \partial t &= f = -\mu / \tau_0, \\ \partial \varepsilon_r / \partial t &= \partial u / \partial r - \Lambda f - (\varepsilon_r - q) / \tau_\varepsilon, & \partial \varepsilon_\varphi / \partial t &= u / r - \Lambda f - (\varepsilon_\varphi - q) / \tau_\varepsilon, \\ \partial \varepsilon_z / \partial t &= -\Lambda f - (\varepsilon_z - q) / \tau_\varepsilon, & \sigma_r(R_1, t) &= \sigma_0(t), \quad u(R_0, t) = 0 \end{aligned}$$

Здесь $u, \sigma_r, \sigma_\varphi$ – физические компоненты вектора скорости и тензора напряжений в цилиндрической системе координат, $\sigma_r = p + 2\mu(\varepsilon_r - q)$, $p = 3Kq$, $\sigma_\varphi = p + 2\mu(\varepsilon_\varphi - q)$, $q = (\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z) / 3$, $K = (\lambda + 2\mu/3)(1 + f_0 \text{sign}(\mathbf{e}))$, $R_0 \leq r \leq R_1$.

Нагрузка при $r = R_1$ задавалась в виде (σ_{00}, t_1, t_2 – постоянные)

$$\sigma_0(t) = \sigma_{00}t / t_1, 0 \leq t \leq t_1, \sigma_0(t) = \sigma_{00}(t - t_2) / (t_1 - t_2), t_1 < t \leq t_2, \sigma_0(t) = 0, t > t_2$$

Решение задачи получено численно при помощи конечно-разностной схемы второго порядка точности. Расчетная область разбивалась по r на 100 ячеек. Во внутренних узлах сетки для расчета использовалась схема Мак – Кормака [14]. Значения неизвестных функций на границах $r = R_i, i = 0, 1$, определялись по схеме «предиктор – корректор»¹ из соотношений

$$K(u/r - \Lambda\mu/\tau_0) - dp/dt + 4\mu(\varepsilon_r - q)/3\tau_\varepsilon = \theta_i(2\mu(\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi)/r - \rho du/dt)$$

выполняющихся на характеристиках

$$\theta_i = dr/dt = (-1)^{i+1} (K + 4\mu/3)^{1/2}$$

Шаг по времени выбирался из условия устойчивости. Заметим, что в последнее уравнение системы входит величина, обратная τ_0 . При малых значениях τ_0 возникают затруднения при численном интегрировании системы. Поэтому, чтобы получить решение при малых τ_0 , нужно использовать равномерно устойчивые разностные схемы.

5. Перейдем к анализу результатов. Все результаты на фиг. 1–8 представлены в безразмерных величинах $r' = (r - R_0)/L, t' = at/L, u' = u/a, p' = p/\sigma_{00}, J' = J/\sigma_{00}^2, \Phi' = \Phi/\sigma_{00}^2, \mu' = \mu/\mu_0, L = R_1 - R_0$. При этом μ_0 – значение μ в неразрушенном материале, $a = [\mu_0(1 - \nu)/(\rho_0(1 - 2\nu))]^{1/2}$, ν – коэффициент Пуассона, ρ_0 – значение ρ в неразрушенном материале.

¹ См. комментарий 3 к этой главе.

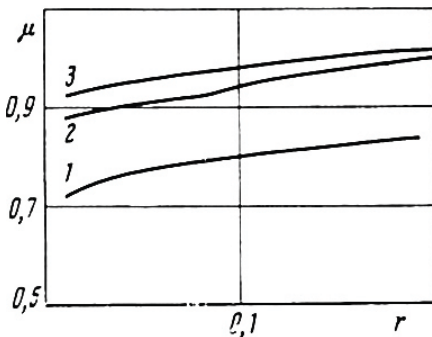
Штрихи далее опускаются. При расчетах принимались следующие значения безразмерных параметров: $\nu = 0.25$, $\Phi_0 = 7.5 \cdot 10^{-3}$, $R_0/L = 0.4$, $t_1 = 0.01$, $t_2 = 2$, $\tau_e = \infty$. Величина $\sigma_{00} = 0.005$ выбрана таким образом, чтобы сходящаяся волна до отражения была упругой; $\Phi_0, \Lambda_0, \tau_0$ определялись из оценки имеющихся данных [10]. Были просчитаны варианты, в которых параметр τ_0 принимал значения: 0, 1, 5, 10. При $\tau_0 = 1$ были просчитаны варианты при значениях Λ_0 , равных соответственно 0, 1, 5, 10.

Множества точек, в которых значения μ меньше единицы, естественно считать зоной разрушения. Поэтому зависимости $\mu = \mu(r)$ могут характеризовать как степень разрушения, т. е. величину повреждений, так и размеры зоны разрушения. На фиг. 1 показаны зависимости $\mu(r)$ при различных значениях параметра τ_0 . Здесь кривые 1–3 соответствуют следующим значениям τ_0 : 0, 1, 5, 10. Зависимости $\mu(r)$ соответствуют тем моментам времени, когда $\partial\mu/\partial t \approx 0$ на интервале $0 < r < 1$, т. е. когда закончился процесс разрушения. Из фиг. 1 видно, что функция $\mu(r)$ монотонно возрастает и при r больших 0,2 $\mu \approx 1$, если $\tau_0 = 5$ или $\tau_0 = 10$. Это означает, что зона разрушения составляет примерно 20 % от толщины образца при $\tau_0 = 5$. Однако при $\tau_0 = 1$ зона разрушения значительно больше и равна примерно половине образца.

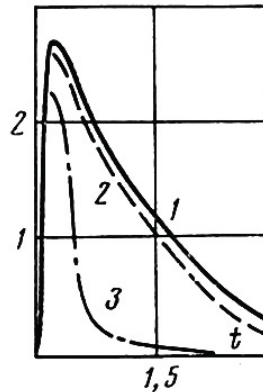
Была также получена зависимость интенсивности касательных напряжений от времени для частицы, расположенной на границе $r = 0$. Эта зависимость изображена на фиг. 2. Здесь кривая 1 соответствует расчету по модели упругого тела, 2 – при $\tau_0 = 10$, 3 – при $\tau_0 = 1$. Сопоставление кривых 1 и 3 показывает, что величина J , рассчитанная с учетом изменения модуля μ , меньше и с течением времени это различие становится значительным. Зависимость J от r при фиксированном t также подтверждает этот вывод. Эти зависимости при $t = 1.2$ показаны на фиг. 3. Здесь кривая 1 соответствует модели упругого тела, 2 – расчету при $\tau_0 = 5$. Аналогичные зависимости имеют место и для других моментов времени. Например, при $t = 1.5$ зависимости J от r имеют вид, показанный на фиг. 4. На этой фигуре кривые 1–3 соответствуют расчетам при τ_0 , равных 0, 5, 10. Таким образом, эти расчеты показывают, что при решении задачи о сходящейся волне при $\tau_0 \neq \infty$ напряжения оказываются меньше, чем напряжения, рассчитанные по модели упругого тела ($\tau_0 = \infty$). Из анализа численных расчетов также видно, что величина скорости менее чувствительна к изменениям параметра τ_0 .

Рассмотрим влияние параметров τ_0 и Λ_0 на давление p . Кривые 1–5 на фиг. 5 показывают зависимость $p(t)$ при $r=0$ и следующих значениях параметра Λ_0 : $0, 10^{-3}, 10^{-2}, 2.5 \cdot 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-2}$. Для любого $t \in (1, 2)$, увеличение Λ_0 приводит к возрастанию p , а моменты времени, при которых p достигает максимального значения, зависят от Λ_0 немонотонно. Заметим, что влияние Λ_0 относительно велико, что можно использовать для нахождения функции $\Lambda = \Lambda(D)$ при проведении эксперимента, аналогичного расчетной схеме задачи. Проиллюстрируем процесс деформирования материальной частицы среды, расположенной на границе $r=0$ (фиг. 6). Здесь горизонтальная ось соответствует объемным деформациям q , вертикальная – давлению p . Процесс рассматривается на интервале времени $1.07 < t < 1.4$, последовательность прохождения точек с увеличением времени – против часовой стрелки.

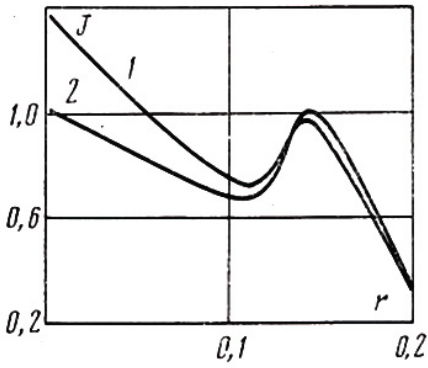
При расчетах параметр τ_0 был принят равным единице. Из фиг. 6 видно, что кривая отходит от линии $p = Kq$. В момент времени $t = 1.4$ начинается упругая разгрузка. Если продолжить эту кривую по пунктирной линии, то получим, что в разгруженном состоянии величина $q > 0$, т. е. произойдет разрыхление среды. Здесь уместно отметить аналогию этой кривой с экспериментально полученными зависимостями, представляющими процесс деформирования в переменных p, q [15].



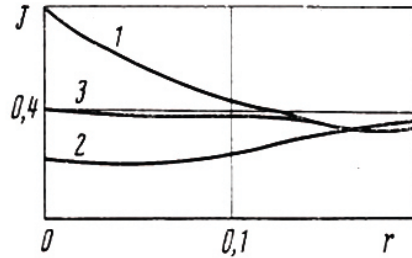
Фиг. 1



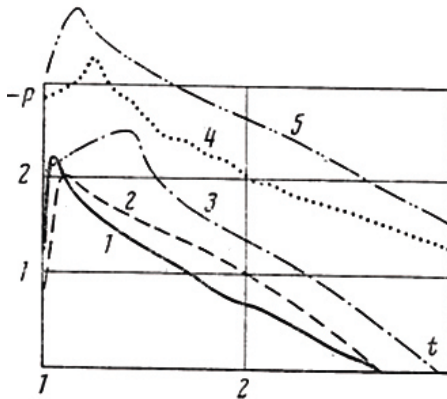
Фиг. 2



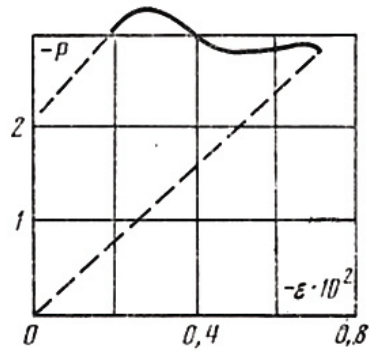
Фиг. 3



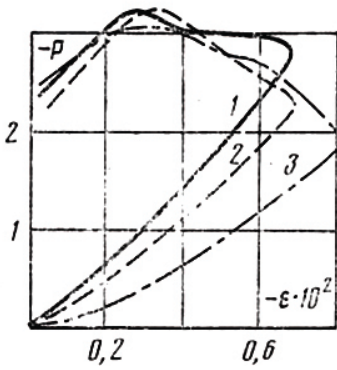
Фиг. 4



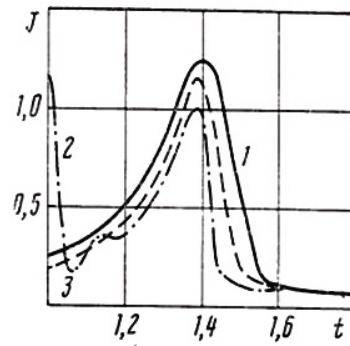
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

На фиг. 7 показано влияние коэффициента трения f_0 на зависимость p от q при $\Lambda_0 = 0.025$ (кривые 1–3 соответствуют расчетам при $f_0 = 0, 0.2, 0.5$). Величина f_0 мало влияет на максимальное значение давления. На максимальное значение деформаций изменение f_0 влияет более существенно. Отметим, что учет релаксации касательных напряжений снижает максимальное значение величины J . Например, если условие текучести имеет вид $J = 0.9\Phi_0$, то максимальное значение J снижается примерно на 15%. На фиг. 8 показаны зависимости $J(t)$ при $r = 0$ и различных значениях τ_e (кривые 1–3 соответствуют расчетам при $\tau_e = \infty, 0, 1, 10$).

Таким образом, проведенные расчеты дают основание надеяться, что представления, положенные в основу предлагаемой модели сплошной среды, качественно отражают поведение горных пород под действием сжимающих напряжений.

Литература

1. Николаевский В. Н., Лифшиц Л. Д., Сизов И. А. Механические свойства горных пород. Деформация и разрушение // Итоги науки и техники: Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ, 1978. Т. 11. С. 123–250.
2. Ставрогин А. Н., Протосеня А. Г. Пластичность горных пород. М.: Недра, 1979. 301 с.
3. Глушко А. И., Ковшов А. Н., Нещеретов И. И., Никитин И. С. О критерии разрушения для горных пород // Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 2. С. 200–204.
4. Gupta I. N. Seismic velocities in rock subjected to axial loading up to shear fracture // J. Geophys. Res., 1973, v. 78, no. 29. P. 6936–6942.
5. Григорян С. С. Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород // ПММ, 1967, т. 31, вып. 4. С. 643–669.
6. Слепян Л. И. О волне хрупкого разрушения // Инж. журн. МТТ, 1968, № 4. С. 190–192.
7. Галин Л. А., Черепанов Г. П. О самоподдерживающемся разрушении напряженного хрупкого тела // Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1966, т. 167, № 3. С. 543–546.
8. Коротков П. Ф. О математической модели постепенного разрушения горных пород и превращении их в пористые сыпучие среды // Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1980, т. 253, № 6. С. 1357–1360.

9. Капустянский С. М., Николаевский В. Н. Количественная формулировка упругопластической дилатансионной модели (на примере песчаника) // Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 4. С. 113–123.
10. Керрен Д., Шоки Д., Симен Л., Остин М. Механизмы кратерообразования в природных средах // Удар, взрыв и разрушение. М.: Мир, 1981. С. 81–115.
11. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматиз, 1962. 284 с.
12. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 303 с.
13. Седов Л. И. Механика сплошных сред. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
14. Warming R. F. Kutler P., Lomax H. Second and third-order non-centered difference schemes for nonlinear hyperbolic equations. AIAA Journal, 1973. V. 11, no. 2. P. 189–196. = Уорминг Р. Ф., Катлер П., Ломакс Х. Нецентральные разностные схемы второго и третьего порядка точности для решения нелинейных уравнений гиперболического типа // Ракетная техн. и космонавтика. 1973. Т. 11. № 2. С. 76–85.
15. Шок Р. Поведение горных пород под действием больших напряжений // Удар, взрыв и разрушение. М.: Мир, 1981. С. 116–130.

Комментарии

1. Статья «О кинетическом подходе к разрушению горных пород» опубликована в журнале «Известия АН СССР. Механика твердого тела», № 6, 1986. С. 140–146; поступила в редакцию 21.06.1985. Авторы – А. И. Глушко, И. И. Неццетов.

2. В марте 1987 г. результаты работы были доложены сотрудникам математико-механического факультета Ленинградского государственного университета им. Жданова. Модель их заинтересовала, более того, был оговорен план проведения экспериментального исследования на гранитных образцах, моделирующего задачу п. 4. Нагрузка создавалась напылением слоя металла на цилиндрическую поверхность гранитного образца и последующим его подрывом, пропуская импульс электротока. Уже была достигнута договоренность с сотрудниками из ВНИМИ об изготовлении нестандартных (с отверстием) гранитных образцов. Но в 1988 г. в институте «скальную» тематику закрыли – и все в одну минуту закончилось.

3. К сожалению, при публикации по требованию редакции из статьи было исключено описание численного решения задачи. Интересующимся этим вопросом следует обратиться к п. 2 гл. 4.

Глава 8. Континуальные модели разрушения твердых тел при нестационарных нагрузках

Описание процессов деформирования и разрушения твердых тел под действием нестационарных интенсивных нагрузок остается одной из сложных и нерешенных проблем механики твердого деформируемого тела. Суть проблемы кроется в многообразии физических процессов, протекающих на микроскопическом уровне. Ее своеобразие состоит и в том, что без привлечения интуитивных представлений и гипотез, и опираясь только на анализ опытных данных, вряд ли возможно установить количественные закономерности, описывающие процесс разрушения твердого тела.

Проиллюстрируем общий ход физических рассуждений, на которые следует опираться при построении математической модели процесса разрушения. Хорошо известно, что в основе процессов разрушения твердых тел лежит зарождение и развитие разного рода микродефектов: дислокаций, микропор, микротрещин. Поэтому для того, чтобы установить законы поведения среды с учетом процесса разрушения, нужно прежде всего установить законы зарождения и развития микродефектов.

Далее при континуальном подходе к описанию разрушения следует ввести фазовое пространство параметров, с помощью которых описывается состояние микродефектов, и функцию распределения микродефектов в этом фазовом пространстве. Опираясь на закономерности зарождения и эволюции микродефектов, определяется уравнение, которому должна удовлетворять функция распределения. С помощью этой функции вводят разного рода средние величины, которые на макроуровне фигурируют в модели в качестве искомым физических величин. Более того, с помощью функции распределения можно установить и определяющие соотношения, если расстояние между порами достаточно велико по сравнению с их размерами. Если же это условие не выполняется, и нельзя пренебречь влиянием соседних пор на напряженное состояние вблизи каждой поры, то приходится обращаться к построению более сложной процедуры, которая является предметом изучения микромеханики разрушения. В этой работе вопросы, связанные с микромеханикой разрушения, не рассматриваются.

В феноменологическом подходе поступают по-другому. Из интуитивных соображений в модель вводятся разного рода макроскопические физические величины, затем привлекая ряд гипотез, постулируют необходимое число законов, которым должны удовлетворять эти величины. Таким образом, континуальная модель хотя и учитывает наличие локальных микродефектов, тем не менее формулируется так, что изучать пове-

дение одной микропоры нет никакой необходимости. Аналогично происходит при статистическом подходе, где введение функции распределения микродефектов отражает процессы, происходящие на микроуровне, и описывает поведение всего ансамбля дефектов в целом.

В течение последних двух десятилетий появилось немало работ, посвященных как экспериментальным, так и теоретическим исследованиям процессов разрушения твердых тел.

Подчеркнем, что в работе рассматриваются только континуальные модели разрушения, т. е. системы математических закономерностей наиболее общего вида, которые удовлетворяют основным законам механики и гипотезам механики сплошной среды и описывают процесс разрушения для случая произвольного напряженного состояния. Работа носит обзорно-аналитический характер. Главная цель работы состоит в том, чтобы рассмотреть те физические идеи, гипотезы и допущения, на которые опираются при построении моделей разрушения.

Изложение иллюстрируется рассмотрением конкретных моделей. При анализе основное внимание уделяется рассмотрению следующих вопросов:

- а) соответствие модели основным законам механики, включая ее термодинамический анализ;
- б) если модель сформулирована для описания частной ситуации, то имеется ли возможность ее обобщения;
- в) границы применимости модели;
- г) наличие решенных задач с использованием модели и их содержательность;
- д) широта учета имеющихся экспериментальных данных, в том числе для определения констант модели;
- е) способ описания модели, стиль этого описания и используемая при этом терминология.

В этой части работы ограничимся анализом моделей, описывающих, главным образом, откольные явления в металлах.

1. При соударении твердых тел часто наблюдается явление, которое получило название «откол» или «отрыв». Впервые эти явления были обнаружены при исследовании соударения металлических стержней в классических экспериментах Гопкинсона начала века (см., например, [1]). Характерной чертой данного процесса является разрыв сплошности материала и образование новых поверхностей, свободных от внешних нагрузок. Если поверхность разрыва пересекается с внешними границами соударяющихся тел, то образуются так называемые откольные чашечки, представляющие собой часть мишени, ограниченную поверхностями разрыва и свободными границами.

Откольные чашечки приобретают в процессе откола некоторую скорость относительно мишени, зависящую от скорости соударения. Благодаря этому откольная чашечка отделяется от мишени и продолжает равномерно двигаться. Если же поверхности разрыва не «выходят» на свободные границы мишени, тогда внутри последней возникают полости или пустоты.

Объясняются откольные явления тем, что при соударении твердых тел после отражения волн сжатия от свободных границ ударника или мишени образуются отраженные волны, за фронтом которых имеются зоны растяжения. При взаимодействии отраженных волн в мишени очень быстро возникают большие растягивающие напряжения, которые могут превысить прочность материала и привести к разрывам сплошности.

Первоначально предполагалось, что критериями отрыва могут служить известные в статической теории разрушения критерии Гриффитса (или Орована) [2, 3]. Однако экспериментальные исследования показали, что откольные разрушения наступают при растягивающих напряжениях, значительно превышающих критические значения, соответствующие статическим. Было предложено объяснение этому факту, основанное на простых физических соображениях. Как следствие, из них вытекал вывод о том, что возникновение откола должно характеризоваться не только некоторыми критическими значениями напряжений, но и величиной интервала времени, в течение которого действуют критические напряжения. Критерии такого рода получили название временных. Обширные экспериментальные исследования были направлены на то, чтобы получить временные критерии откола для различных материалов [4–12].

Следует отметить, что метод расчета откольной прочности, основанный на использовании временных критериев отрыва, не приводит к каким-либо принципиально новым проблемам или трудностям по сравнению с использованием статических критериев, которые можно условно считать мгновенными критериями разрушения. Как в том, так и в другом случаях, оба критерия позволяют определить точку в среде, где впервые напряжения достигают критической величины. Как будет вести себя материал после этого, из существующих (локальных) критериев разрушения установить невозможно, так как они в принципе не учитывают процессов образования новых поверхностей и полостей. Поэтому, опираясь только на критерий разрушения, не представляется возможным дать реалистический прогноз размера откольной чашечки или внутренних полостей, и определить их динамику.

Затем был сделан следующий шаг, когда для описания откольных явлений было предложено ввести параметр повреждаемости и на этой основе построить континуальную модель разрушения. Такой подход был

впервые предложен Л. М. Качановым [13], а затем развит Ю. Н. Работновым для описания разрушения металлов в условиях ползучести [14, 15]. Ю. Н. Работнов ввел скалярный параметр ω , характеризовавший накопление в среде микроповреждений. Предполагалось, что скорость накопления дефектов, т. е. величина $d\omega/dt$ зависит от уровня повреждения ω и величины напряжений σ . Таким образом, приходим к кинетическому уравнению

$$\frac{d\omega}{dt} = D(\omega, \sigma) \quad (1.1)$$

где $D = D(\omega, \sigma)$ – известная функция. Принималась гипотеза, что разрушение происходит в тот момент времени, когда величина ω достигала некоторого критического значения ω' . Позже А. А. Ильющин обобщил этот подход и предложил для описания процесса накопления повреждений использовать тензор повреждаемости Σ [16]. Некоторые формальные способы описания накопления повреждений с помощью вектора или тензора повреждаемости можно найти в [17–19]. Очевидно, что введение параметра повреждаемости (в виде скаляра или тензора) позволяет с одной стороны учесть временной характер откольных разрушений, а с другой – прогнозировать местоположение и размеры зоны разрушения.

Естественно предположить, что накопление повреждений в среде приводит к изменению ее физических свойств: изменяются скорости распространения упругих волн, предел текучести и т. д. Однако подход Л. М. Качанова, Ю. Н. Работнова и А. А. Ильюшина не учитывал этого факта. Первая попытка учесть влияние пористости материала на его механические характеристики была сделана W. Nernann. В [20] рассматривалось поведение твердых тел при напряжениях, значительно превышающих предел текучести материала, и считалось, что в этих условиях компоненты девиатора напряжений много меньше давления. Такое предположение оправдано в рамках гидродинамического приближения. Чтобы учесть влияние пористости, автор полагал, что внутренняя энергия пористого материала e_v может быть выражена через внутреннюю энергию всего материала e следующим образом:

$$e_v(\rho) = e(v\rho) \quad (1.2)$$

Здесь v – пористость (удельный объем пор), ρ – плотность среды; позже эта идея была перенесена А. И. Глушко на уравнение состояния пористой среды в рамках нелинейной вязкоупругой среды [21], а в работе [22] – на случай упругопластической среды. Следует отметить, что гипотеза W. Nernann, так же как и ее обобщения другими авторами, может выполняться лишь приближенно, и при больших значениях пористости расчеты

на основе (1.1), (1.2) будут заметно отклоняться от опытных данных. Однако нужно ясно понимать, что необходимость прибегать к такого рода гипотезам прежде всего продиктована отсутствием опытных данных, с помощью которых можно было бы явно учесть влияние пористости (либо в более общем случае – повреждаемости, определяемой как тензор) на определяющие соотношения.

Таким образом, приходим к тому моменту в развитии континуальной теории разрушения, когда все гипотезы и предположения так или иначе сформулированы. Соберем их теперь все вместе и покажем, как в общем случае записываются определяющие соотношения.

Основное предположение – это предположение о том, что поведение среды с дефектами может быть приближенно описано уравнениями сплошной среды, состояние которой характеризуется, наряду с тензорами деформаций и напряжений, еще и параметром повреждаемости. Внутренняя энергия такой среды должна быть задана как функция кинематических величин, энтропии и параметра повреждаемости. Если вместо внутренней энергии задается какая-либо другая термодинамическая величина, например, давление, то также считается, что и эта величина должна быть функцией всех параметров, характеризующих состояние среды.

Определяющие соотношения (т. е. связь между тензором напряжений и его производной по времени с тензором деформаций и его производной по времени) должны быть записаны так, чтобы они не противоречили первому и второму закону термодинамики. Если в модели задается внутренняя энергия, то с помощью законов термодинамики выводятся все соотношения модели: связь между напряжениями и деформациями, температурой и другими параметрами состояния, функция скорости диссипации и т. д. Если же другая термодинамическая величина, например, давление, задана, как функция параметров состояния, то имеются некоторые термодинамические ограничения на вид этой функции.

К определяющим соотношениям добавляется кинетическое уравнение, которое должно описывать процесс накопления повреждений

$$\frac{d\omega}{dt} = f(\omega, \sigma, T) \quad (1.3)$$

Здесь ω – параметр повреждаемости, σ – тензор напряжений, T – температура. Возможно, что в правую часть (1.3) должен входить и некоторый тензор, отражающий наличие и изменение неупругих деформаций. Ввиду того, что в работе рассматриваются модели, описывающие откольное разрушение, в последующих выкладках опускаем зависимость от T . Так как накопление повреждений происходит за счет двух процессов:

зарождения новых и роста уже имеющихся повреждений, то функцию f можно представить в виде двух слагаемых

$$f \triangleq f_1(\sigma) + f_2(\omega, \sigma) \quad (1.4)$$

где функции f_1 описывает зарождение, а f_2 – рост повреждений. Эти функции определяются на основе анализа опытных данных при дополнительных физических предположениях. В экспериментальных исследованиях [23, 24] было обнаружено, что откольное разрушение в металлах (медь, алюминий, свинец) при высокоскоростных соударениях сопровождается накоплением микропор. Там же были получены эмпирические зависимости, описывающие эволюцию пор в поле растягивающих напряжений. Опираясь на эти зависимости и делая дополнительные предположения, можно получить кинетическое уравнение, которому удовлетворяет пористость. Одной из первых работ, где исследовалась эволюция одной изолированной поры в безграничной упругопластической среде, была работа [25]. В [21] кинетическое уравнение типа (1.3), описывающее эволюцию пор в нелинейной вязкоупругой среде, записывалось в следующем виде:

$$\frac{dV}{dt} = N_0 v_0 \exp\left[\frac{(P - P_{01})_+}{P_1}\right] + V \frac{(P - P_{02})_+}{\eta} \quad (1.5)$$

Здесь V – удельный объем микропор, P_{01}, P_{02} – пороговые значения давлений, выше которых начинается зарождение или рост пор, N_0, v_0, P_1, η – физические постоянные,

$$(P)_+ \triangleq \max(0, P)$$

В 80-х годах Curran D. R., Seaman L. и Shokey D. A. продолжили экспериментальные исследования откольного разрушения и установили более точные эмпирические зависимости для скоростей зарождения и роста микродефектов. Эти зависимости были использованы в [26]. В частности, кинетическое уравнение в данной работе имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV_n}{dt} + \frac{dV_g}{dt}, \quad \frac{dV_g}{dt} = g(V) F(V) \frac{\sigma - \sigma_G}{\eta}, \quad \sigma < \sigma_G \quad (1.6)$$

$$dV_n/dt = \left\{ \exp\left[m_2 |\sigma - \sigma_N| / K\theta\right] \right\} h(V) / (1 - V), \quad \sigma < \sigma_N$$

В уравнениях (1.6) первое слагаемое описывает зарождение, а второе – рост микродефектов; $h, g, K, m_2, \eta, \sigma_G = f(V)$ – экспериментально определенные функции и константы.

Для хрупких материалов, например, армо-железо или бетон, повреждаемость характеризуется наличием в среде микротрещин. Так как число микротрещин достаточно велико, то принято характеризовать накопление повреждений с помощью функций распределения дефектов по

размерам и ориентации [23]. Однако при математическом моделировании процессов деформирования и разрушения в рамках механики сплошной среды возникает вопрос, как ввести параметр повреждаемости, чтобы он однозначно характеризовал физические свойства среды и вместе с тем был как-то связан с функциями распределения. Из физических соображений можно предположить, что для хрупких материалов в качестве параметра повреждаемости следует ввести тензор второго ранга $\mathbf{D} = \{D_{ij}\}$. Однако до настоящего времени этому тензору не удается найти ясного физического истолкования, а следовательно, неясно, как его определять.

Далее, так же, как и для скалярного параметра повреждаемости, нужно установить закон, по которому изменяется тензор повреждаемости в зависимости от состояния среды, т. е. ввести кинетическое уравнение типа

$$d\mathbf{D}/dt = \mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) \quad (1.7)$$

где $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$ – тензорная функция, которая определяется на основе анализа опытных данных. Как уже говорилось, известных в настоящее время опытных данных недостаточно, чтобы определить функцию \mathbf{P} для какого-нибудь материала.

Обратимся теперь к конкретным моделям, описывающим поведение материалов при процессах откольного разрушения, обращая основное внимание анализу физических предположений и допущений, а также формулировке определяющих уравнений.

2. Рассмотрим континуальную модель разрушения, построенную на принципах механики многофазных сред [27–31]. Повреждаемой средой (ПС) называется твердое деформируемое тело, процесс деформирования которого сопровождается накоплением в среде микродефектов: микропор и микротрещин. Для характеристики процесса накопления микропор

вводится скалярная величина, называемая удельным объемом микропор, соответственно, для микротрещин – тензор повреждаемости $\mathbf{D} = \{D_{ij}\}$.

Характерной особенностью подхода, развиваемого в указанных работах, является постулат, согласно которого для любой элементарной частицы ПС вводится понятие «матрицы повреждаемой среды»¹. Это понятие отражает интуитивное представление ПС как двухфазной сплошной среды, одну фазу которой представляет ненарушенный сплошной материал («матрица»), другую – микропоры и микротрещины. Более строгое и формальное определение этого понятия будет указано ниже, после описания тензора повреждаемости.

¹ Здесь и далее кавычками выделяется прямое цитирование авторского текста.

Напряженное состояние ПС характеризуется тензором «средних напряжений» $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$. Наряду с этим вводится тензор «истинных напряжений» $\sigma^\circ = \{\sigma_{ij}^\circ\}$, который связывают с напряжениями, обусловленными деформациями матрицы ПС. Тензор повреждаемости \mathbf{D} вводится с помощью физических рассуждений, которые можно описать следующим образом. Пусть в некоторой точке ПС выбрана элементарная площадка dS с нормалью $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$. Рассмотрим следы пересечения этой площадки с микротрещинами. Поскольку каждая микротрещина имеет какое-то раскрытие, то при пересечении образуется некоторая фигура с ненулевой площадью.

Возьмем сумму площадей от всех таких фигур dS_n и вычислим отношение $d_n = dS_n/dS$. Эта величина будет характеризовать меру повреждаемости среды в направлении вектора \mathbf{n} . Если выбрать площадку, так что направление вектора нормали \mathbf{n} совпадает с направлением одной из координатных осей OX_i , то можно ввести три числа $d_i = dS_i/dS, i = 1, 2, 3$, характеризующие повреждаемость среды в данной точке. Однако авторы считают, что свойства ПС будут отражены более полно, если учесть и поворот рассматриваемой площадки, предварительно стянув на ней все микродефекты, так что рассматривается площадка без дефектов. Наводящие соображения говорят о том, что площадка со стянутыми микродефектами не будет лежать в той же плоскости, что и первоначальная, и должна характеризоваться своей нормалью $\mathbf{n}^\circ = \{n_1^\circ, n_2^\circ, n_3^\circ\}$. Таким образом, для каждой координатной площадки, т. е. площадки, ортогональной одной из координатных осей OX_i можно ввести скаляр $D_j = dS_{nj}/dS$ и единичный вектор $\{n_1^j, n_2^j, n_3^j\}, j = 1, 2, 3$. В результате авторы этих работ приходят к понятию «тензора поверхностной плотности повреждений $\mathbf{D} = \{D_{ij}\}$ ».

Тензор \mathbf{D} вводится главным образом для того, чтобы связать между собой тензоры средних и истинных напряжений. Эту связь обычно записывают в виде

$$\sigma = [(\mathbf{I} - \mathbf{D})\sigma^\circ + \sigma^\circ(\mathbf{I} - \mathbf{D})]/2 \quad (2.1)$$

где \mathbf{I} – единичный тензор. Равенство (2.1) является одним из основных тензорных уравнений в рассматриваемой модели. Чтобы получить его, пришлось принять целую вереницу недостаточно ясных и четких предположений.

Понятие поверхностной плотности повреждений было использовано ранее в [22]. В этой работе можно также найти физические соображения, позволяющие установить связь между тензорами «истинных», средних напряжений и поверхностной плотности. Наряду с тензором поверхностной

плотности повреждений \mathbf{D} вводится тензор объемной плотности повреждений Σ , характеризующий процесс накопления в материале микропор. В модели постулируется, что в общем случае тензор \mathbf{D} является зависимой величиной от тензора Σ , т. е. должно выполняться соотношение

$$d_{ij} = \gamma_{ijkl} f_{kl}(\zeta_{mn}) \quad (2.2)$$

Здесь ζ_{mn} – компоненты тензора объемной плотности повреждений Σ , γ_{ijkl} – компоненты тензора четвертого ранга, f_{kl} – тензорные функции тензорного аргумента.

В [27–31] можно найти некоторые частные случаи, как задавать эти функции. Однако аргументы, которые приводятся в пользу того или иного способа задания функции f_{kl} или тензора γ , как правило, носят умозрительный характер и не опираются на конкретные опытные данные.

Процесс накопления микроповреждений при хрупком разрушении описывается в модели кинетическим уравнением

$$d\Sigma/dt = (\sigma^\circ - \mathbf{I}\sigma_n)(1 + \zeta)/\tau_k \sigma_n \quad (2.3)$$

где $\sigma_n = \sigma_n^\circ \left[1 - (\zeta/\zeta_*)^{1/2} \right]$, σ_n° – пороговые значения, отвечающие началу роста повреждений в поврежденном и неповрежденном состояниях материала, $\zeta = \zeta_{kk}$ – первый инвариант тензора объемной плотности повреждений¹ Σ .

Деформирование ПС описывается двумя тензорами: тензором скоростей деформаций $d\epsilon/dt = \{d\epsilon_{ij}/dt\}$ и «истинным» тензором скоростей деформаций $d\epsilon^\circ/dt = \{d\epsilon_{ij}^\circ/dt\}$, который, как и тензор σ° , ассоциируется с деформированием матрицы ПС. В модели принимается, что «истинные» напряжения и деформации связаны между собой уравнениями упруго-пластического течения. Ниже эта связь будет выписана в явном виде.

Обратимся сначала к уравнениям, связывающим тензор скоростей деформаций

$$\frac{d\epsilon_{ij}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3$$

где v_i – компоненты вектора скорости частиц с истинным тензором скоростей деформаций

¹ Как показывают опытные данные, кинетика роста пор для алюминия характеризуется анизотропией.

$$\frac{d\varepsilon_{ij}^{\circ}}{dt} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} - \frac{d\Delta_{ij}}{dt}, \quad \frac{d\Delta_{ij}}{dt} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} \frac{d\Delta}{dt} \bigg/ \frac{d\theta'}{dt}, \quad \frac{d\theta'}{dt} = \frac{d\theta}{dt} - \frac{d\Delta}{dt},$$

$$\frac{d\Delta}{dt} = \frac{1}{1+\zeta} \frac{d\zeta}{dt}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} \quad (2.4)$$

В (2.4) V – удельный объем ПС.

Прежде чем записать уравнения упругопластического течения, следует сделать одно замечание. Полная система определяющих уравнений модели отсутствует в рассматриваемых работах. Большая их часть, в том числе и уравнения упругопластического течения, сформулированы как этапы вычислительной процедуры. Было бы нецелесообразно цитировать все это дословно. Поэтому возьмем на себя ответственность привести данные уравнения в общепринятом виде. Тогда связь между девиатором тензора истинных напряжений S_{ij}° и девиатором истинного тензора скоростей деформаций следует записать так

$$\frac{DS_{ij}^{\circ}}{dt} = 2\mu \left(\frac{d\varepsilon_{ij}^{\circ}}{dt} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \theta' \right) + \lambda^* S_{ij}^{\circ}, \quad \frac{DS_{ij}^{\circ}}{dt} = \frac{dS_{ij}^{\circ}}{dt} - S_{iq}^{\circ} \Omega_{iq} - S_{jq}^{\circ} \Omega_{qj}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \lambda^* \geq 0 \quad (2.5)$$

Здесь DS/dt – производная в смысле Яумана, Ω – антисимметричный тензор поворота, μ – модуль сдвига, δ_{ij} – символ Кронекера. Величина λ^* принимается больше нуля, если компоненты девиатора S_{ij}° удовлетворяют условию пластичности, и $\lambda^* \equiv 0$, если напряжения лежат в упругой зоне

$$S_{ij}^{\circ} = \sigma_{ij}^{\circ} + P \delta_{ij}, \quad P = P_r(\rho^{\circ}) + P_t(\rho^{\circ}, T) \quad (2.6)$$

Последняя группа уравнений выражает собой законы сохранения массы, импульса и энергии:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d\varepsilon_{aa}}{dt}, \quad \rho \frac{dv_j}{dt} = \nabla_i \sigma_{ij}, \quad \rho \frac{de}{dt} = \sigma_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}, \quad (2.7)$$

$$\rho = \rho^{\circ} (1 - \zeta), \quad e = e^{\circ} + e_p + e_s, \quad e^{\circ} = e_r^{\circ}(\rho^{\circ}) + e_t^{\circ}(T)$$

Величины e_p, e_s называются «удельной внутренней энергией материала пустот» и «энергией, связанной с образованием новых поверхностей»; индексы r, t обозначают прямую зависимость от объема и температуры. Условие пластичности в работе явно не сформулировано. Однако можно предположить, что в модели используется условие пластичности Мизеса.

Итак, представлены все уравнения модели ПС. В эти уравнения входит целый ряд экспериментально определяемых функций, причем, о способах их определения в [27–31] ничего не сказано.

3. Обратимся к работе [32], посвященной исследованию откольных явлений в армко-железе. В опытах, проведенных авторами работы, изучалась кинематика соударения алюминиевых пластин, летящих со скоростью около 500 м/с, с неподвижной мишенью из армко-железа; в том числе регистрировалось движение тыльной поверхности мишени. По этим данным устанавливался момент времени, когда в материале мишени происходит откол. Но для того, чтобы определить величину растягивающих напряжений, действующих в области отрыва, необходимо привлечь дополнительные представления о конкретном механизме деформирования материала. Авторы работы отмечают: «многочисленными экспериментами доказано, что гидростатическое приближение и модель идеальной упругопластической среды совершенно недостаточны для описания поведения материалов в волнах умеренной интенсивности. Эволюция импульса сжатия и в качественном и в количественном отношении существенно зависит от вязкоупругих свойств среды». Поэтому они предлагают использовать для описания процессов деформирования вязкоупругую модель, основанную на дислокационных представлениях работы [33].

В работе рассматриваются только одномерные движения в лагранжевых переменных в рамках одноосного деформированного состояния. Чтобы записать определяющие соотношения, вводится ортогональная система координат так, чтобы направление оси OX совпадало с направлением нормали к поверхности пластины. В этой системе единственная отличная от нуля компонента тензора деформаций обозначается как ε_x , компонента тензора напряжений – σ_x , проекция вектора скорости на ось OX – u , удельный объем среды – v , удельный объем микропор – v_T , гидростатическое давление – p . Кроме того, в работе вводятся две величины:

$$\sigma_{xy} = 3/4 [\sigma_x(v) - p(v)] \quad (3.1)$$

называемая максимальным касательным напряжением, и

$$\frac{d\gamma_{pl}}{dt} = \frac{1}{v_0} \frac{dv}{dt} - \frac{1}{G(p)} \frac{d\sigma_{xy}}{dt}, \quad v_0 = \text{const} \quad (3.2)$$

которая называется скоростью пластических деформаций и определяется, исходя из представления тензора скоростей деформаций в виде суммы упругой и неупругой составляющих.

Модуль сдвига G считается зависящим от p и представляется в следующем виде

$$G(p) = \frac{3}{4} \frac{p}{p_p} [c_l^2(p) - c_v^2(p)]$$

где c_l и c_v – скорость продольных волн и «объемная скорость звука».

Опустим промежуточные рассуждения, связанные с теорией дислокаций, и запишем основное уравнение, из которого определяется скорость пластических деформаций, как функция максимального касательного напряжения:

$$\frac{d\gamma_{pl}}{dt} = K \sigma_x \left[f(\sigma_{xy}, t) + K_2 \exp\left(\left|\frac{\sigma_{xy}}{\tau}\right|\right) \right] \quad (3.3)$$

где K, K_2, τ , – постоянные, f – функция, определяемая из опытных данных.

Второе кинетическое уравнение определяет скорость изменения удельного объема микропор:

$$\frac{dv_T}{dt} = -\sigma_x \frac{A_1 \exp(v_T/v_{T0}) \exp(\sigma_x/\sigma_0)}{A_2 + \exp(\sigma_x/\sigma_0)} \quad (3.4)$$

где $A_1, A_2, v_{T0}, \sigma_0$ – постоянные.

«Функциональный вид зависимости кинетического соотношения (3.4)» – пишут авторы работы, – «выбран из формальных соображений с тем, чтобы при малых напряжениях получить известную зависимость долговечности образца от нагрузки, а при больших напряжениях иметь более слабую зависимость от нагрузки». В работе также «предполагается, что по мере разрушения действующее в слое образца сдвиговое напряжение падает по закону» (v_{T1} – постоянная)

$$\sigma_{xy} = \frac{v_{T1}}{v_T + v_{T1}} \sigma_{xy} \Big|_{v_T=0}$$

Последнее соотношение можно рассматривать как попытку учета обратного влияния процесса накопления микропор на напряженное состояние среды. Вместе с тем, что понимается под величиной $\sigma_{xy} \Big|_{v_T=0}$ – непонятно, так как величина σ_{xy} (также как и σ_x, u, v) в начале статьи была определена, как функция лагранжевой координаты h и времени t .

Заметим, что в уравнения (3.2)–(3.4) не входит величина γ_{pl} , а величину $d\gamma_{pl}/dt$ можно исключить и получить уравнение

$$\frac{1}{G(p)} \frac{d\sigma_{xy}}{dt} = \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} + K\sigma_x \left[f(\sigma_{xy}, t) + K_2 \exp\left(\frac{|\sigma_{xy}|}{\tau}\right) \right] \quad (3.5)$$

Тогда состояние материала в каждой точке будет определяться четырьмя независимыми параметрами σ_{xy}, u, v, v_T , которые должны удовлетворять четырем дифференциальным уравнениям: законам сохранения массы, импульса, а также уравнениям (3.4), (3.5).

Заметим, что в определении скорости пластической деформации (3.2) авторы пренебрегают членом, пропорциональным $\partial G/\partial p$, что соответствует таким процессам, в которых изменение модуля сдвига как функции от давления незначительно, хотя это, вообще говоря, *a priori* не известно.

4. Рассмотрим континуальную модель разрушения, предложенную в [34] для описания откольных явлений в металлах. Модель опирается на физические представления и опытные данные, содержащиеся в работах [23], [24]. В соответствии с [21] считается, что в металлах при достаточно больших растягивающих напряжениях происходит процесс зарождения и роста микропор. Чтобы учесть обратное влияние микропор на напряженно-деформированное состояние среды, используется подход, развитый в [22] для описания поведения пористых упругопластических сред.

Перейдем к формулировке определяющих уравнений модели. Обозначим через v – удельный объем среды с порами, v_s – удельный объем твердой фазы, v_n – удельный объем микропор; $\alpha = v_s/v$. Из определения этих величин следует $v = v_s + v_n$.

Процесс накопления микропор характеризуется величиной v_n , которая называется «относительным объемом микропор». Изменение этой величины за интервал времени Δt задается соотношением

$$v_{n+1} = \bar{v}_n \exp\left[3T(p_s - p_{g0})\Delta t\right] + 8\pi \dot{N} R^3 \Delta t, \quad \dot{N} = N_0 \exp\left[(p_s - p_{n0})/p_1\right] \quad (4.1)$$

Здесь $v_{n+1} = v_n(t + \Delta t)$, $\bar{v}_n = v_n(t + \Delta t)$, p_s – давление в твердой фазе, R – параметр распределения образовавшихся за время Δt пор, \dot{N} – скорость зарождения пор в единице объема, p_{n0} – пороговое значение давления, ниже которого в среде не происходит образования пор, p_{g0}, T, p_1 – некоторые постоянные.

Скорость изменения удельного объема пористой среды характери-

зается величиной $\dot{\theta} = \dot{v}/v$. Также вводится величина $\dot{\theta}_s = \dot{v}_s/v$, которая характеризует скорость изменения «твердой компоненты» среды.

Из определения величин $\dot{\theta}, \dot{\theta}_s$ и α вытекает

$$\dot{\theta}_s = \dot{\theta} \left(1 + \alpha v / \dot{v} \right) \quad (4.1)$$

Для того, чтобы описать поведение среды с порами в рамках механики сплошной среды, в работе вводятся тензоры деформаций $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{ij}\}$ и напряжений $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{ij}\}$ среды с порами, а также тензоры деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_s = \{(\varepsilon_s)_{ij}\}$ и напряжений $\boldsymbol{\sigma}_s = \{(\sigma_s)_{ij}\}$ «твердой компоненты». В работе постулируется, что по аналогии с уравнением (4.2) тензор скоростей деформаций «твердой компоненты» $d\boldsymbol{\varepsilon}_s/dt$ связан с тензором скоростей деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}/dt$ соотношениями

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_s = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \left(1 + \alpha v / (\alpha \dot{v}) \right) \quad (4.2)$$

а тензоры $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\sigma}_s$ связаны между собой посредством

$$\boldsymbol{\sigma} = \alpha \boldsymbol{\sigma}_s \quad (4.3)$$

Неупругое поведение среды с порами описывается уравнениями упругопластического течения. Задается условие пластичности

$$\sigma_{ij} \sigma_{ij} + (2f^{-2}/3 - 3) \sigma_m^2 = \frac{2}{3} \rho \sigma_T, \quad f = 2/5 \sqrt{1 - \rho}, \quad \rho = 1 - v_n \quad (4.4)$$

где $\sigma_m = \sigma_{ii}/3, \sigma_T$ – постоянная. Принимается, что приращение тензора деформаций $\Delta \varepsilon_{ij}$ может быть представлено в виде суммы «упругой» $\Delta \varepsilon_{ij}^e$ и «пластической» $\Delta \varepsilon_{ij}^p$ частей. «Пластическая» составляющая определяется с помощью ассоциированного закона течения

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \bar{\lambda} \left[\sigma_{ij} + (2f^{-1}/3 - 1) \sigma_m \delta_{ij} \right] \quad (4.5)$$

Здесь $\bar{\lambda}$ – множитель пропорциональности, который может быть определен из уравнений (4.5), (4.6), δ_{ij} – символ Кронекера. Связь между приращением тензора напряжений $\Delta \sigma$ и $\Delta \varepsilon_{ij}^e$ задается уравнением

$$\Delta \sigma_{ij} = \Delta \alpha \sigma_{ij} + \alpha \left[1 + \alpha v / (\alpha \dot{v}) \right] (2G \Delta \varepsilon_{ij}^e + \lambda \Delta \theta^e \delta_{ij}) \quad (4.7)$$

где $\Delta \theta^e = \Delta \varepsilon_{ii}^e, G, \lambda$ – модули упругости Ламе. Скорость изменения объ-

емной доли пор связана с «пластическим изменением объема» уравнением

$$\dot{\rho}/\rho = -\dot{\theta}^p, \quad \dot{\theta}^p = \Delta \varepsilon_{ij}^p$$

Чтобы получить замкнутую систему уравнений, необходимо к приведенным выше уравнениям добавить уравнения законов сохранения.

Обратим внимание на некоторые обстоятельства. Уравнение (4.7) можно получить из (4.4) при дополнительном предположении, что выполняются соотношения

$$\Delta(\sigma_s)_{ij} = \left[1 + \dot{\alpha} v / \left(\alpha \dot{v} \right) \right] (2G\Delta\varepsilon_{ij}^e + \lambda\Delta\theta^e \delta_{ij})$$

Какие-либо соображения в пользу такой зависимости в работе не приводятся. Следуя формально физическим рассуждениям авторов, представляется, что более естественно было бы предположить, что приращение тензора σ_s определяется по формуле

$$\Delta(\sigma_s)_{ij} = \left(2G\Delta(\varepsilon_s^e)_{ij} + \lambda\Delta\theta_s^e \delta_{ij} \right), \quad \Delta\theta_s^e = \Delta(\varepsilon_s^e)_{ii}$$

где по аналогии с (4.3) величины $\Delta(\varepsilon_s^e)_{ij}$ связаны с упругой составляющей

$\Delta\varepsilon_{ij}^e$ соотношением

$$\Delta(\varepsilon_s^e)_{ij} = \Delta\varepsilon_{ij}^e \left[1 + \dot{\alpha} v / \left(\alpha \dot{v} \right) \right]$$

Процесс накопления микропор описывается приближенной формулой (4.1). Представляется, что более естественно следовало бы исходить из кинетического уравнения

$$\dot{v}_n = 3T(p_s - p_{g0})v_n + 8\pi\dot{N}R^3 \quad (4.8)$$

Общее решение этого уравнения может быть записано в виде

$$v_n(t) = v_n(t_0)f(t) + 8\pi R^3 \int_{t_0}^t \dot{N}(s)f(t-s)ds, \quad f(t) = \exp\left(3T(p_s - p_{g0})t\right) \quad (4.9)$$

Формула (4.1) получается из (4.9), если при интегрировании в правой части использовать формулу прямоугольников. Если же при решении системы определяющих уравнений данной модели используется численная схема второго или более высокого порядка точности, тогда формула (4.1) непригодна, и следует исходить из уравнения (4.8).

В модели допускается «упругопластическое закрытие» пор. Однако никакого термомеханического анализа этого процесса в работе нет.

5. Известен подход [35] к построению континуальных моделей разрушения, опирающийся на принцип максимума диссипации и второй закон термодинамики. В такой модели в число определяющих

параметров явно вводится повреждаемость D . Обозначим через $\boldsymbol{\varepsilon}$ тензор упругих деформаций, T – температура, S – энтропия, \mathbf{e}^p – тензор скоростей пластических деформаций, $\Psi = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \kappa, D)$ – свободная энергия Гельмгольца, ρ – плотность, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжения, κ – параметр упрочнения, $\Phi = \Phi(\boldsymbol{\sigma}, h, r)$ – функция текучести, $r = \rho \partial\Psi / \partial D$, $h = \partial\Psi / \partial \kappa$.

По аналогии с моделью упрочняющегося упругопластического тела считается, что в пространстве переменных существует область, ограниченная поверхностью текучести, и такая, что внутри этой области материал ведет себя упруго. Далее, опираясь на неравенство Клаузиуса – Дюгема (второе начало термодинамики)

$$\rho \frac{d\Psi}{dt} - \left(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}^p + \frac{dD}{dt} \frac{\partial\Psi}{\partial D} + \frac{d\kappa}{dt} \frac{\partial\Psi}{\partial \kappa} \right) \geq 0$$

и принцип максимума диссипации

$$(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) \mathbf{e}^p + (r - r^*) \frac{dD}{dt} + \sum_{i=1}^m (h_i - h_i^*) \frac{d\kappa_i}{dt} \geq 0, \quad \Phi(\boldsymbol{\sigma}^*, r^*, h_i^*) < 0 \quad (5.1)$$

можно вывести определяющие уравнения

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial\Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad S = \rho \frac{\partial\Psi}{\partial T}, \quad \mathbf{e}^p = \lambda \frac{\partial\Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \frac{d\kappa}{dt} = -\lambda \frac{\partial\Phi}{\partial h}, \quad \frac{dD}{dt} = -\lambda \frac{\partial\Phi}{\partial r} \quad (5.2)$$

Обращаем внимание на то, что принцип максимума диссипации (5.1) записан для случая m параметров упрочнения. Как видно из (5.2), вследствие применения (5.1) поведение материала на поверхности текучести описывается законом ассоциированного течения.

6. Перейдем к анализу моделей, описывающих процессы деформирования и разрушения горных пород. Хорошо известно, что горные породы разрушаются под действием как растягивающих, так и сжимающих напряжений, причем их прочность в поле растягивающих напряжений существенно ниже, чем прочность в поле сжимающих напряжений [36–38]. Если физические основы процессов деформирования и разрушения в поле растягивающих напряжений более или менее ясны и во многом схожи с процессами разрушения в металлах при откольных явлениях, то физика процессов, определяющих разрушение горных пород в поле сжимающих напряжений, к настоящему времени изучена слабо. Экспериментальные исследования направлены в основном на изучение поведения материалов на макроуровне. Этим объясняется тот факт, что практически все известные модели, описывающие разрушение горных пород, являются феноменологическими.

Если сопоставить поведение горных пород при разрушении с аналогичным поведением металлов, то следует отметить два обстоятельства. Во-первых, металл в поле умеренных сжимающих напряжений никогда не разрушается, и может изменять свои физические свойства обратимо при

фазовых переходах первого или второго рода. В отличие от металлов, горные породы не выдерживают больших сжимающих напряжений, и необратимо деформируются, изменяя физические свойства. Во-вторых, при необратимом деформировании металлов не происходит «переупаковки», т. е. плотность материала в разгруженном состоянии постоянна и практически совпадает с начальной. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, говорят, что металлы пластически несжимаемы.

Для горных пород, наоборот, наблюдается увеличение удельного объема среды в разгруженном состоянии, т. е. плотность материала уменьшается. В этом случае говорят, что среда разрыхляется и наблюдается эффект дилатансии. Очевидно, что значительно сложнее провести испытания и получить надежные опытные данные при существенно нестационарных нагрузках. Сам материал горных пород, как правило, обладает, по сравнению с практически однородными металлами, неоднородностью характеристик в пределах одного и того же массива, наличием инородных включений и т. д. Для материалов горных пород характерен значительно больший объем микродефектов, чем для металлов. В горных породах сложность проведения лабораторных экспериментов усугубляется еще тем обстоятельством, что подготовка образцов сопряжена с необратимым изменением физико-механических характеристик по сравнению с их значениями в ненарушенном массиве.

Если бы даже эти явления отсутствовали, то представляется принципиально невозможным установить разумные количественные зависимости, описывающие поведение любых материалов, исходя из одного анализа экспериментальных данных без привлечения дополнительных предположений и рассуждений физического характера о протекающих явлениях.

Поэтому практически с первых работ по исследованию нестационарных процессов стали обращаться к численному моделированию. Успех такого подхода во многом зависит от решения ряда проблем. В их числе необходимо назвать: построение достаточно простой математической модели нестационарного деформирования и разрушения; разработку численных методов решения систем уравнений с частными производными, и, наконец, надежное определение параметров модели на основе анализа полученных экспериментальных данных. Здесь рассмотрим только те работы, которые направлены на решение проблемы построения математической модели, описывающей поведение горных пород под действием нестационарных нагрузок в поле сжимающих напряжений. При этом в изложении будем следовать хронологическому порядку. Анализ базируется на работах только российских авторов. Ряд работ [39–42], где разрушение трактуется как некоторый мгновенный акт на фронте сильного разрыва (фронта разрушения), здесь подробно не рассматривается. В основе данного подхода к разрушению горных пород лежит гипотеза, что перед фронтом сильного разрыва должно выполняться некоторое условие, так называемый критерий разрушения. В свою очередь, критерии условно разде-

ляются на силовые и энергетические. В соответствии с этим работы данного направления можно разбить на две группы. В каждой группе исходят из соответствующего критерия и строят решение на фронте разрыва и движении плоской волны в упругой среде. Хотя в этих работах молчаливо предполагалось, что аналогичные рассуждения справедливы и для случая сложного напряженного состояния, однако работ, в которых данная схема была распространена на решение конкретных трехмерных задач, впоследствии так и не появилось.

Существуют и другие работы, авторы которых описывают разрушение, не вводя явно параметров (и соответствующих уравнений), отвечающих за неупругое поведение материалов, а используя известные представления и положения теории упругости, дополненные условием пластичности. Одной из первых работ такого рода была [43], в которой предложен метод численного моделирования процессов деформирования и откольного разрушения твердых тел, не учитывающий накопления в среде микродефектов. Принимается, что в среде растягивающие напряжения σ_m на любой площадке не могут превышать некоторого предельного значения σ^* , $\sigma_n \leq \sigma^*$ (где $\sigma_n = \sigma_{ij}n_i n_j$, $n = \{n_1, n_2, n_3\}$ – единичная нормаль к рассматриваемой площадке). Чтобы описать дальнейшее поведение среды, авторы прибегают к дискретизации сплошной среды. Расчетная область разбивается на конечное число ячеек, и считается, что среда в ячейке не разрушена, пока не выполнено $\sigma_n = \sigma^*$. С момента выполнения данного равенства нормальные усилия на рассматриваемой площадке полагаются равными нулю, а данная ячейка считается разрушенной. Существенным недостатком такого подхода к моделированию разрушения является тот факт, что физическое явление представляется как один из шагов вычислительной процедуры, и тем самым зависит от дискретизации расчетной области. Более подробный анализ этого подхода можно найти в [44]. Там, в частности, установлено, что определяемые по этой модели значения величин, характеризующих откольную зону, существенно меньше, чем аналогичные значения, определяемые в экспериментах.

Одна из первых моделей, в которой разрушение рассматривалось как некоторый процесс неупругого деформирования, была предложена в [45]. В ее основе лежат следующие гипотезы и предположения. «Деформации сдвига являются основной причиной изменения прочности материала и возникновения (и роста) пористости. При напряжениях меньше предела текучести среда является упругой; при выполнении условия текучести девиатор скоростей деформаций e'_{ij} связан с девиатором тензора напряжений S_{ij} уравнениями Прандтля – Рейсса

$$\frac{DS_{ij}}{Dt} + \lambda S_{ij} = 2Ge'_{ij} \quad (6.1)$$

где D/Dt – производная по Яуманну, G – модуль сдвига. Поверхности, на которых выполняются условия текучести, имеют следующий вид:

$$\tau = \Phi(\gamma, P, E), \quad \tau = \left(\frac{1}{2} S_{ij} \dot{S}_{ij} \right)^{1/2}, \quad \gamma = \int_0^t e_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p dt \quad (6.2)$$

здесь τ – интенсивность касательных напряжений, γ – параметр упрочнения, e_{ij}^p – девиатор тензора скорости неупругой деформации, $P = -\sigma_{kk}/3$ – давление, E – внутренняя энергия. Напомним, что (6.2) называются поверхностями нагружения.

Полный удельный объем среды V представляется в виде суммы удельных объемов «скелета» V_s и необратимой части V_h , приближенно равного объему пустот:

$$V = V_s + V_h, \quad V_s = f(p_s, E), \quad p_s = P(1 - V_h/V) \quad (6.3)$$

В уравнениях (6.3) p_s – давление, «действующее в скелете», V_h – пористость. Для ее определения предлагается использовать уравнение

$$\dot{V}_h/V = \Lambda \dot{\gamma} - \left\{ H(\dot{P})/K_1 - \left[1 - H(\dot{P}) \right]/K_2 \right\} \dot{P} - \alpha \dot{E} \quad (6.4)$$

Здесь точка над величиной – символ производной по времени, $\Lambda = \Lambda(\gamma, P, E)$ – «коэффициент дилатансии», K_1 и K_2 – модули сжатия среды за вычетом сжимаемости скелета для нагрузки и разгрузки, соответственно, $K_1 = K_1(\gamma, P, E)$, $K_2 = K_2(\gamma, P, E)$, $\alpha = \alpha(\gamma, P, E)$ – коэффициент, зависящий от теплового расширения «скелета»; функция $H(x) = 1$, если $x \geq 0$, и $H(x) = 0$, если $x < 0$.

В уравнениях и соотношениях (6.2)–(6.4) обращает внимание на себя явная зависимость эмпирических функций Φ , f , Λ , K_1 , K_2 и α от внутренней энергии E . Однако никаких конкретных соображений по их определению в работе не содержится.

7. Затем последовал цикл работ [46–48]. Известно, что механизм разрушения горных пород существенно зависит от характера их напряженно-деформированного состояния: при больших сжимающих напряжениях разрушение вызывается интенсивными сдвиговыми деформациями и сопровождается разрыхлением (дилатансией), а при растягивающих напряжениях процесс разрушения характеризуется отрывом. При интенсивных взрывных нагрузках проявляются оба механизма: вдали от центра взрыва происходит разрушение отрывом, а в области, прилегающей к центру, где возникают большие сжимающие напряжения реализуется разрушение от сдвига. Чтобы отразить эти особенности поведения горных пород при разрушении, в рассматриваемой модели предлагается исполь-

зовать три группы определяющих соотношений: соотношения «квазиупругого деформирования» при неразрушающих нагрузках и системы уравнений, описывающие сдвиговое разрушение с разрыхлением и разрушение отрывом, которые будем для краткости обозначать блоками А, С и В модели, соответственно.

В блоке В через $\sigma_i, \varepsilon_i, \varepsilon_i^p, \varepsilon_i^e$ обозначены главные значения тензоров напряжений, тензоров полных, пластических и упругих деформаций, $\mathbf{E} = \{E_{ij}\}$ – матрица модулей упругости, $\mathbf{F} = \{F(\varepsilon_1^p, \varepsilon_2^p, \varepsilon_3^p)\}$ – матрица податливостей, Ψ_i – потенциал пластического течения. Отрыв описывается не в рамках континуальной модели разрушения с привлечением параметра, явно характеризующего повреждаемость, а как «развернутый по времени процесс развития упругопластической анизотропии», который описывается вдоль главных направлений следующими уравнениями

$$\mathbf{E}\mathbf{F} = \mathbf{I}, \quad \frac{d\sigma_k}{dt} + \lambda_k \sigma_k = E_{ik} \frac{d\varepsilon_i}{dt} - \sigma_j E_{ik} \frac{dF_{ij}}{dt}, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (7.1)$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^p + \varepsilon_i^e, \quad \varepsilon_i^e = F_{ij} \sigma_j, \quad d\varepsilon_i^p = \lambda_j \partial \Psi_j / \partial \sigma_i, \quad \Psi_j = F_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (7.2)$$

В (7.2) \mathbf{I} – единичная матрица. Условия «текучности (отрыва)» задаются равенствами $\sigma_k = \sigma_{00}(\varepsilon_k^p); \lambda_j \equiv 0$ при $\sigma_k < \sigma_{00}(\varepsilon_k^p)$, « $\sigma_{00}(\varepsilon_k^p)$ – предел прочности, зависящий от накопленного ущерба и направления».

Чтобы записать уравнения состояния в виде, подобном формуле (7.1), необходимо предположить, что тензор напряжений и тензоры деформаций (полных, упругих, пластических) коаксиальны, т. е. направления главных осей всех этих тензоров совпадают. Однако явно такая гипотеза в работах не только не обсуждается, но даже и не сформулирована. В связи с этим возникает вопрос о согласованности гипотезы о коаксиальности тензоров с вышеупомянутой трактовкой отрыва как процесса развития упругопластических деформаций. Так как определяющие уравнения не содержат в явном виде выражение для диссипации энергии при разрушении, то и не сформулированы условия ее неотрицательности; тем самым этот вопрос остается открытым.

Разрушение «хрупких тел при сжатии» (блок С) описывается в рамках модели упругопластического течения уравнениями Прандтля – Рейсса (6.1), Условие прочности принимается в виде

$$S_{ij} S_{ij} = Y^2(p)/3 \quad (7.3)$$

где S_{ij} – девиатор тензора напряжений, а «предел прочности» $Y(p)$ необратимо уменьшается в соответствии с кинетическим уравнением

$$\frac{dY}{dt} = \varphi(Y - Y_1(p), Y - Y_2(p)), Y|_{t \leq T} = Y_1, Y|_{t \geq T + \tau} = Y_2 \quad (7.4)$$

В (7.4) T – «момент начала разрушения, τ – характерное время разрушения, φ – функция, которая задается с помощью одной из нижеследующих формул: $\varphi = \text{const}$, $\varphi = -\beta(Y - Y_2)$, $\varphi = -\beta[(Y - Y_1)(Y - Y_2)]^{1/2}$ », причем авторы «отдают предпочтение третьему варианту». (Неясно, правда, зачем в таком случае приводить в модели первые два?) «Для оценки τ используется выражение $\tau = d_p(r)/C_f$, $d_p(r)$ – средний размер обломка на эпицентральной дистанции r , C_f – характерная скорость распространения трещин, в качестве которой принята скорость волн Рэлея». Функции $Y = Y_1$ – «кривая прочности исходного грунта», и $Y = Y_2$ – «кривая прочности разрушенного грунта», определяются так

$$Y_i(p) = Y_{0i} + \mu_i p / \left[1 + \mu_i p (Y_{pi} - Y_{0i}) \right], \quad i = 1, 2 \quad (7.5)$$

Здесь p – давление; μ_i, Y_{pi}, Y_{0i} – некоторые эмпирически определяемые параметры; $\mu_i = \mu_i(r), Y_{0i} = Y_{0i}(r)$.

Обратим внимание на введение в явном виде в уравнения модели величины τ – характерного времени разрушения, в большинстве других моделей являющейся искомой. Предлагаемое определение τ вносит в модель дополнительные предположения. Вид функций φ свидетельствует о том, что он выбирался из соображений удобства вычислений, а не из анализа результатов конкретного эксперимента. Обращаем внимание и на такой факт. Рассмотрение предела прочности $Y(p)$ в качестве одного из определяющих параметров модели неминуемо влечет за собой его появление в выражениях, определяющих компоненты тензора напряжений σ_{ij} , чего нет в модели. Другими словами, авторы молчаливо предполагают, что в выражениях для σ_{ij} члены, содержащие $Y(p)$, малы по сравнению с остальными.

При выполнении (7.3) в блоке С определяется объемная необратимая деформация \mathcal{E}^p :

$$d\mathcal{E}^p/dt = -2/\sqrt{3} \Lambda(p, \varepsilon) d\gamma^p/dt + (K_i^{-1} - K_{st}^{-1}) dp/dt, \quad \gamma^p = \sqrt{\varepsilon_{ih}^p \varepsilon_{ih}^p} \quad (7.6)$$

В (7.6) $i = m$ при $dp \geq 0$, $i = r$ при $dp < 0$, K_m, K_r – «объемные модули семейства гидростат нагрузки и разгрузки, $K_r = K_{st}$ ». Явный вид функции Λ не приведен.

Зависимость для объемного деформирования имеет следующий вид

$$p = p_c(V) + G(E - E_c)/V, \quad E_c = -\int p_c(V) dV \quad (7.7)$$

где E, V – удельные энергия и объем, а «кривая холодного сжатия» имеет вид уравнения Тэта

$$p_c = K \left[(V_0/V)^n - 1 \right] / n \quad (7.8)$$

Заметим, что в описании блока C ([46], стр. 31, 34, 39–40) отсутствуют указания, где и в каком виде брать значения для параметров G, K, V_0, n , как и отсутствует ссылка на уравнение, из которого должно определяться E . Квазиупругое деформирование при неразрушающих нагрузках (блок A) описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} d\varepsilon'_{ij}/dt &= 1/2G dS_{ij}/dt + \mu_{0S} (S_{ij} - S_{ij}^{st})/2G + |H_{ij}|(1 - \varphi_S^{-1}) \text{sign}(S_{ij} - S_{ij}^{st}), \\ d\varepsilon/dt &= dp/K_d dt + \mu_{0p} (p - p_{st})/K_{st} + |H|(1 - \varphi^{-1}) \text{sign}(p - p_{st}), \\ H_{ij} &= (\varepsilon'_{ij} - \varepsilon'_{ij,0}) \left\{ 1 - (S_{ij} - S_{ij,0}) / \left[2G_0 (\varepsilon'_{ij} - \varepsilon'_{ij,0}) \right] \right\} / (t - t_0 + \delta), \\ H &= (\varepsilon - \varepsilon_0) \left\{ 1 - (p - p_0) / \left[K_0 (\varepsilon - \varepsilon_0) \right] \right\} / (t - t_0 + \delta), \\ \varphi_S &= \exp \left| \left(\sqrt{J_2} - \sqrt{J_{2,st}} \right) E_{st}^{-1} \right|^\beta, \quad \varphi = \exp \left| (p - p_{st}) E_{st}^{-1} \right|^\beta \end{aligned} \quad (7.9)$$

где $S_{ij}, \varepsilon'_{ij}$ – девиаторы тензоров напряжений и деформаций, $\varepsilon = \rho/\rho_0 - 1$, $G_0, G_d, G_{st}, K_0, K_d, K_{st}$ – «идеальный, динамический и статический модули сдвига и сжатия, μ_{0S}, μ_{0p} – коэффициенты стационарной вязкости». Индексам st соответствуют «статические значения напряжений»: $p_{st} = K_{st} \varepsilon$, $S_{ij}^{st} = 2G_{st} \varepsilon'_{ij}$, t – время, δ – константа с размерностью времени, t_0 – момент прихода возмущения в частицу, нижним индексом 0 обозначено состояние частицы в момент t_0 .

Не будем обсуждать, насколько хорошо уравнения (7.9) описывают опытные данные, однако отметим, что их запись противоречит одному из основных правил механики: определяющие уравнения модели должны быть инвариантны относительно преобразований координат. Представленные выше уравнения не удовлетворяют этому правилу, т. к. содержат функции типа модуль или $sign$, использующие в качестве аргументов компоненты тензора.

К вышесказанному необходимо добавить следующее. Модель очень сильно перегружена множеством параметров и экспериментально определяемых функций, причем физический смысл некоторых неясен, а строгое определение их отсутствует. Формально в монографии [46] предлагаются

«способы определения констант». Определение в основном сводится к численному моделированию конкретного опыта (причем того же класса, что и тот эксперимент, с которым далее сравнивается численное решение) с варьированием констант модели. Также предлагается использование корреляционных зависимостей, полученных другими авторами. При этом не обсуждаются ни условия проведения опытов, ни достоверность корреляционных зависимостей. Строго говоря, предлагаемые способы можно использовать для оценки параметров, но их нельзя рассматривать как методы определения констант. Предложенная модель используется для решения только одной задачи – распространение возмущений при камуфлетном взрыве, правда, сильно усложненной наличием зоны полиморфных изменений материала, влиянием масштабного фактора и т. д. Распространение модели на другие задачи в [46–48] отсутствует.

8. В [49] предложена модель¹, также базирующаяся на некотором обобщении теории пластического течения. В ее основе лежат следующие постулаты. Поведение горной породы описывается уравнениями модели некоторого упругопластического тела с упрочнением. Условие пластичности записано следующим образом:

$$\Phi = \Phi(P, \tau, k_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (8.1)$$

В условии (8.1) $P = \sigma_{kk}/3$ – первый инвариант тензора напряжений или давление, τ – величина, пропорциональная второму инварианту девиатора тензора напряжений, $\tau = 3/4 S_{ij} S_{ij}, k_i \sim$ параметр упрочнения, вообще говоря, зависящий от i -го участка пути нагружения. Область в пространстве напряжений σ_{ij} , где $\Phi < 0$, соответствует состоянию упругости, а поверхность в этом же пространстве, на которой выполняется условие $\Phi = 0$, называется поверхностью текучести. Аналогично [51] вводятся понятия активного и нейтрального процессов нагружения. Предполагается, что тензор скоростей деформаций e может быть представлен в виде суммы

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p \quad (8.2)$$

Тензор скоростей упругих деформаций e^e связан с тензором напряжений уравнениями

$$\frac{DS_{ij}}{Dt} = 2Ge_{ij}^e, \quad i \neq j, \quad \frac{dP}{dt} = -e_{ii}^e \quad (8.3)$$

¹В [50] приводится обобщение модели на случай материала горной породы, который наряду с исходной анизотропией обладает и анизотропией процесса разрушения.

Здесь D/Dt – производная в смысле Олдройда, K, G – модули объемного сжатия и сдвига.

Тензор скоростей неупругих деформаций e^p определяется с помощью неассоциированного закона течения

$$e_{ij}^p = \left(\frac{2}{3} \Lambda \tau \delta_{ij} + S_{ij} \right) \frac{d\Lambda}{dt} \quad (8.4)$$

Параметр $\Lambda = \Lambda(P, k_i)$ называется скоростью дилатансии и определяется из анализа опытных данных; δ_{ij} – символ Кронекера, Величина $d\Lambda$ положительна при активном процессе нагружения, и равна нулю в остальных случаях. Ее можно определить явно, если продифференцировать по времени уравнение (8.1) по правилу сложной функции и воспользоваться уравнениями (8.2)–(8.4). В модели требуется, чтобы при активном нагружении скорость диссипации механической энергии W была положительной.

$$\frac{dW}{dt} = \sigma_{ij} e_{ij}^p > 0$$

Вторая часть работы посвящена определению скорости дилатансии и поверхности текучести из анализа опытных данных, полученных при испытаниях цилиндрических образцов из песчаника. Далее без какой-либо мотивировки постулируется, что поверхность текучести может быть представлена как объединение трех поверхностей, каждая из которых образована соответствующей кривой на плоскости переменных P, τ . Первая поверхность ($i=1$) соответствует процессам деформирования, сопровождающимся упрочнением, другая ($i=2$) – разупрочнению, третья ($i=3$) – разрушенному материалу («остаточная прочность»).

К описанию модели в данной работе имеется некоторое количество замечаний. Поверхности текучести Φ представлены в инвариантной форме (8.1), из которой следует, что они симметричны относительно прямой, перпендикулярной девиаторной плоскости. Между тем, из формы записи экспериментальных зависимостей (см. [49], стр. 115, формулы (6.1)–(6.3)), являющихся основой для построения поверхности Φ , видно, что упомянутая симметрия в опытных данных отсутствует. Данный факт остался вне внимания авторов. В формуле (7.1) ([49], стр. 116) введен параметр k_3 , который затем нигде явно не используется, а его количественное определение отсутствует.

В модели используется большое число параметров, принимающих различные значения в зависимости от изменения других, не менее сложных, величин. Все это порождает большую громоздкость и служит источником логических ошибок, а учитывая то, что разные параметры модели могут быть определены с различной точностью, может привести, например, к возможной «нестыковке» отдельных участков предельной

поверхности Φ . В [49] утверждается, что численные значения констант, описывающих различные «предельные поверхности», зависят от скорости деформирования. Тем самым модель не адекватна рассмотренным авторами экспериментальным данным, так как в определяющих уравнениях отсутствует параметр, явно зависящий от скорости деформирования. Обращает на себя внимание еще одно утверждение авторов [49]. В работе полагается, что с помощью формулы

$$\frac{D\lambda}{Dt} = \left\{ \frac{3GS_{ij}e_{ij}}{8\tau^2} \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} + \frac{Ke_{ij}}{2\tau} \frac{\partial\Phi}{\partial P} + \frac{Dk_i}{2Dt} \frac{\partial\Phi}{\partial k_i} \right\} \left\{ \varepsilon_{ij} \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} - K \frac{\partial\Phi}{\partial P} \right\}^{-1} \quad (8.5)$$

удается выразить величину $D\lambda/Dt$. Однако это неверно. В числитель формулы (8.5) входит производная по времени от параметра упрочнения Dk_i/Dt . Но $k_i = k_i(\varepsilon^p, \gamma^p)$ (где ε^p, γ^p – «пластические деформации объема и сдвига») и дифференцируя это выражение по правилу сложной функции, получим

$$\frac{Dk_i}{Dt} = \frac{\partial k_i}{\partial \varepsilon^p} \frac{D\varepsilon^p}{Dt} + \frac{\partial k_i}{\partial \gamma^p} \frac{D\gamma^p}{Dt} \quad (8.6)$$

Учитывая, что $d\varepsilon^p/dt = e$, подставим (8.4) в формулу (8.6), а затем результат – в формулу (8.5). Из полученного уравнения вытекает правильное выражение для множителя $D\lambda/Dt$. В связи с этим возникают новые вопросы о разрешимости уравнения (8.5) относительно величины $D\lambda/Dt$ и об условиях ее знакоопределенности.

9. Остановимся еще на одном подходе к описанию континуального разрушения, предложенном в работах [52–55]. Интерес к этим работам вызван утверждением автора о том, что «рост повреждаемости в термоупругих средах управляется не кинетическим уравнением, а конечным соотношением, связывающим текущее значение повреждаемости с текущими значениями деформации, энтропии и распределенного источника повреждений». Чтобы понять ход рассуждений, лежащих в основе цитируемого утверждения, остановимся подробнее на анализе модели, следуя ее изложению в [55], как наиболее полному, в частности, используя принятую там систему обозначений и терминологию. В работе принимается, что для описания поведения повреждающейся среды следует ввести, наряду с общепринятыми параметрами состояния (\mathbf{F} – градиент деформаций, θ – температура, η – удельная энтропия, ε – удельная внутренняя энергия), «некоторый тензор второго ранга $\boldsymbol{\pi}$, который служит мерой поврежденности материала», и «в общем случае не определяется ни текущим значением $\{\mathbf{F}(t), (t)\}$, ни даже всей предысторией $\{\mathbf{F}(\tau), (\tau)\}, -\infty < \tau \leq t^0$ ». Тензору поврежденности $\boldsymbol{\pi}$ далее сопоставляется

тензор второго ранга $\mathbf{\Pi}$ – «реакция материала на тензор поврежденности $\boldsymbol{\pi}$ ». Используя эти величины, закон сохранения энергии можно сформулировать в следующем виде

$$\rho_k \dot{\varepsilon} = \mathbf{T}_k : \dot{\mathbf{F}} + Q_T + Q_f, \quad Q_T = \text{Div} \mathbf{q}_k + \rho_k r_T, \quad Q_f = \rho_k \left(r_f - \dot{\varepsilon}_f \right) \quad (9.1)$$

В (9.1) символ «:» обозначает операцию свертки, нижний индекс k обозначает начальную конфигурацию, ρ – плотность среды, « \mathbf{T}_k – несимметричный тензор напряжений Пиола – Кирхгофа первого рода», \mathbf{q}_k – вектор потока тепла в переменных начальной конфигурации, « Q_T – приток энергии, обусловленный теплопроводностью и распределенными источниками тепла r_T . Приток энергии Q_f обусловлен распределенными источниками и стоками не термомеханической природы. Скалярная величина r_f – плотность распределенных источников энергии, связанных с изменением повреждаемости материала за счет внешнего воздействия на геометрию и количество микродефектов. Она является произвольно заданным внешним полем и, в частности, может быть тождественно равна нулю. В отличие от r_f величина $d\varepsilon_f/dt$ отлична от нуля в любом процессе изменения повреждаемости и представляет собой плотность распределенной поверхностной энергии».

Напомним, что в уравнение закона сохранения энергии могут входить только внешние притоки энергии к частице, которые возникают за счет различных механизмов взаимодействия, отличных от работы макроскопических сил [56, стр. 201]. Второй принцип термодинамики в модели формулируется в виде «локального неравенства»

$$\delta_M + \delta_T + \delta_f \geq 0 \quad (9.2)$$

$$\delta_M = \theta d\eta/dt - (\text{Div} \mathbf{q}_k / \rho_k + r_T) \quad (9.3)$$

$$\delta_T = (\theta \rho_k)^{-1} \mathbf{q}_k \nabla_k \theta, \quad \delta_f = \boldsymbol{\pi} : \dot{\mathbf{\Pi}} + \varepsilon_f - r_f$$

Здесь δ_M – внутренняя (механическая) диссипация, δ_T – диссипация, связанная с теплопроводностью среды; величина δ_f называется автором «диссипацией континуального разрушения». Формулировка второго начала термодинамики в таком виде вводится, по-видимому, впервые. В связи с этим напомним классическую запись [56, стр. 239]:

$$\rho \theta \dot{\eta} = q^e + q$$

где q^e – приток тепла к частице, величина q называется некомпенсируемым теплом, $q \geq 0$, причем $q = 0$ при обратимых процессах. Важно отметить, что в последнее уравнение не входят внешние притоки энергии, в частности, не должны входить внешние притоки энергии, связанные с величинами $d\varepsilon_f/dt$ и r_f . Если переписать (9.1) с учетом выражений (9.2) и (9.3), получим «неравенство диссипации»

$$-\dot{\varepsilon} + \rho_k^{-1} \mathbf{T}_k : \dot{\mathbf{F}} + \theta \dot{\eta} + \boldsymbol{\pi} : \dot{\mathbf{\Pi}} + \delta_T \geq 0 \quad (9.4)$$

В соответствии с [55], введем две совокупности параметров состояния $\lambda = \{\mathbf{F}, \eta, \mathbf{\Pi}, \nabla_k \theta\}$ и $\Sigma = \{\varepsilon, \mathbf{T}_k, \theta, \boldsymbol{\pi}, \varepsilon_f, \mathbf{q}_k\}$. Обращаем внимание на следующее обстоятельство. В [55] λ не присваивается никакого наименования, и явно не говорится о независимости ее величин. Тем не менее, автор, как видно и из названия статьи, строит свою модель, используя методы и принципы механики сплошной среды. Тогда из его рассуждений следует, что λ в этом контексте может рассматриваться только как полная система определяющих параметров. Следовательно, величины, входящие в λ , независимы, и меняются в известных пределах произвольно. При анализе модели исходим из данного предположения. Следуя [55, стр. 305], нелинейный термоупругий повреждающийся материал определяется, как среда, для которой величины из совокупности Σ представляются в виде функций от λ . Так как неравенство (9.4) должно выполняться для всех возможных движений среды, а величины $d\mathbf{F}/dt, d\eta/dt, d\mathbf{\Pi}/dt$ считаются независимыми, можно получить «необходимые и достаточные» условия, при которых выполняется это неравенство

$$\mathbf{T}_k = \rho_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{F}}, \quad \theta = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial (\nabla_k \theta)} = 0, \quad \boldsymbol{\pi} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{\Pi}}, \quad \delta_T \geq 0 \quad (9.5)$$

Эти уравнения представляют собой определяющие соотношения модели термоупругой повреждающейся среды.

В работе утверждается, что равенство

$$\delta_M + \delta_f = 0 \quad (9.6)$$

также относится к «необходимым и достаточным» условиям выполнения (9.4). Однако, используя те же стандартные выкладки, из рассматриваемой системы уравнений, и в частности, из (9.4), никак нельзя получить (9.6), в отличие от предыдущих условий (9.5). По сути, это дополнительное предположение. Далее предполагается, что «распределенный сток энергии $d\varepsilon_f/dt$ вместе с источниками r_f равен нулю, если $d\mathbf{\Pi}/dt = 0$. Как следствие, получают, что $d\varepsilon_f/dt$ может быть представлен в виде

$$d\varepsilon_f/dt = \mathbf{G} : d\Pi/dt, \quad \mathbf{G} = \partial\varepsilon_s/\partial\Pi \quad (9.7)$$

где $\varepsilon_s = \varepsilon_s(\Pi)$ – некоторая известная функция. Величина r_f задается формулой

$$r_f = \mathbf{G}_* : \frac{d\Pi}{dt} \quad (9.8)$$

где \mathbf{G}_* – произвольно «заданный тензор второго ранга, определяющий плотность внешних источников разрушения». Условие (9.6) и тот факт, что δ_M не зависит от $d\Pi/dt$, позволяют прийти к выводу, что $\delta_M = 0$ и $\delta_f = 0$ при любых $d\Pi/dt$. Используя последнее равенство и подставив в уравнение (9.3) выражения (9.7), (9.8), получим

$$\left(\frac{\partial\varepsilon_f}{\partial\Pi} + \mathbf{G} - \mathbf{G}_* \right) : \frac{d\Pi}{dt} = 0$$

Отсюда следует уравнение

$$\frac{\partial\varepsilon_f(\mathbf{F}, \eta, \Pi)}{\partial\Pi} + \mathbf{G}(\Pi) - \mathbf{G}_*(t) = 0$$

которое определяет связь Π с текущими значениями \mathbf{F}, η и \mathbf{G}_* . При $\mathbf{G}_*(t) = 0$, в частности, получается уравнение

$$\partial\varepsilon_f(\mathbf{F}, \eta, \Pi)/\partial\Pi + \mathbf{G}(\Pi) = 0$$

означающее, что величины \mathbf{F}, η и Π оказываются зависимыми. Такой результат является прямым следствием принятия допущения (9.6).

Для иллюстрации некоторых свойств модели в [57] приводится решение задачи о расширении сферической полости, расположенной в безграничной среде, и находящейся под действием давления.

10. Основу модели, предложенной в работе [58], составляют следующие предпосылки и гипотезы. Сдвиг описывается известными соотношениями теории пластического течения – уравнениями Прандтля – Рейсса¹. Считается, что скорость не оказывает влияния на процесс деформирования. Наряду с использованием традиционного в теории упругопластического

¹ Авторы, приводя данные соотношения, ссылаются на работу [59]. Напомним, что именно в этой работе С. С. Григорьяном была выдвинута плодотворная гипотеза о том, что процессы сдвигового деформирования грунта описываются теми же соотношениями, что и для металлов, и полученными в классической работе Рейсса Е. [60]. Использование этой гипотезы в моделях, описывающих поведение грунтов под действием динамических нагрузок, в настоящее время превратилось в общее место.

течения соотношения о представлении тензора скоростей деформаций в виде упругой и неупругой частей авторы работы используют дополнительное предположение о разложении объемной части тензора скорости пластической деформации на гидростатическую $\boldsymbol{\varepsilon}_H^p$ и дилатансионную составляющие $\boldsymbol{\varepsilon}_D^p$. Последняя принята пропорциональной скорости изменения инвариантов девиатора тензора напряжения $J_i, i = 1, 2, 3$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_D^p = A_i H (S_{ij} \varepsilon'_{ij}) dJ_i / dt \quad (10.1)$$

где H – функция, определенная в п. 2, A_i – некоторые функции, явно в работе не определенные, S_{ij} – девиатор тензора напряжений, ε'_{ij} – девиатор тензора скоростей деформаций.

Считается, что материал любой скальной породы обладает тремя «предельными» механическими характеристиками – «условиями начальной, максимальной и остаточной прочности». Первая определяет поведение материала при текучести (т.е. при возникновении неупругих деформаций); вторая соответствует условию, при котором материал заведомо разрушится (максимальная прочность). Наконец, третья характеристика количественно описывает поведение разрушенного материала. Результаты экспериментов, на которых базируются авторы [62], получены при исследовании деформирования и разрушения скальных пород под действием сжимающих квазистатических нагрузок. В [62] при сжатии $\sigma \geq 0$, $\sigma = \sigma_{kk} / 3$, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений.

Для случая простых (пропорциональных) траекторий нагружения при обобщении результатов экспериментальных исследований по разрушению горных пород получены эмпирические зависимости деформационного типа для $\boldsymbol{\varepsilon}_D^p$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_D^p = \varphi_i + \alpha_i \left\{ \beta_i f_i (\sqrt{J_2}) / g_i (\sigma - R) \right\}^{k_i}, \quad i = 1, 2 \quad (10.2)$$

В зависимостях (10.2) $i=1$ соответствует «допредельному режиму нагружения», $i=2$ – «запредельному режиму нагружения», $\varphi_i, \alpha_i, \beta_i, k_i$ – экспериментальные параметры; f_i, g_i – некоторые функции, R – предел прочности породы при одноосном растяжении.

В данной модели обращает внимание на себя ряд обстоятельств.

Хотя авторы и оговариваются, что «предлагаемая модель может рассматриваться как предельная – динамическая и статическая» (что это такое, подробно не оговаривается) и «конкретный вид для двух предельных моделей будет различным для одного и того же материала», приведенные зависимости получены при обработке результатов только квазистатических опытов. Ввиду того, что в работе никаких слов о динамике, кроме цити-

рованных, нет, это ограничивает использование модели только квазистатическими режимами нагружения.

Приведенные в работе формальные выражения для определения ε_n^p имеют вид, исключающий возможность как дальнейшего их анализа, так и использования для количественной оценки.

Хорошо известно (см., например [51]), что уравнения теории упругопластической деформации в полной мере описывают деформирование материала при простом нагружении, т. е. когда компоненты девиатора напряжений изменяются монотонно и пропорционально одному параметру. Известно, что использование этих уравнений, адекватных уравнениям нелинейно упругого тела, для описания пластических деформаций при сложных зигзагообразных путях нагружения приводит к неудовлетворительным результатам. Более того, в теории пластичности естественным является обратный вопрос – какими должны быть нагрузки, прикладываемые к телу, чтобы в каждой точке его могли реализоваться условия простого нагружения. Но этот аспект совершенно выпал из внимания авторов как данной работы, так и [45].

Но именно результаты экспериментов на простых траекториях и использовались при выводе соотношений (10.2). Так как конкретный тип зависимостей (10.1) в работе не приведен, и отсутствуют какие-либо указания, как эти зависимости построить в общем случае, то данную модель правильнее считать удобной схемой, позволяющей производить экспрессоценки величины дилатансионной составляющей пластической деформации для цитированных в работе экспериментов. В подтверждение данного соображения говорит еще и такой факт. В зависимостях (10.2) явно входит в качестве аргумента величина R . Тем не менее, ни о каких реальных физических причинах, влияющих на появление в данном выражении величины предела прочности на одноосное растяжение, в работе не упоминается. Это еще раз подтверждает факт, что выражения (10.2), несмотря на свой инвариантный вид, носят чисто формальный характер.

11. Итак, подробно рассмотрено несколько примеров континуальных моделей, описывающих поведение материала при нестационарных нагрузках, в том числе процессы разрушения. И хотя список моделей на этом не исчерпывается, и можно было бы проанализировать ряд других работ, идеи и методы построения данных моделей отражают практически все многообразие теоретических подходов к описанию разрушения материалов при нестационарных нагрузках. Здесь не затрагивались вопросы, связанные с «адекватностью» моделей известным опытным данным. Можно было бы указать ряд работ, где, используя рассмотренные выше модели, авторами получены решения некоторых нестационарных задач. В этих работах на примере конкретных расчетов показывается, что модели дают удовлетворительное совпадение с имеющимися экспериментальными

данными. Вместе с тем хорошо известно, что опытные данные сами по себе лишь приближенно, с точностью погрешностей измерений, отражают свойства материалов. Нередко бывает так, что используя различные модели, можно получить количественные результаты, отличающиеся друг от друга не более, чем на погрешность измерений. С этой точки зрения такие модели одинаково правомерны.

Важный вопрос, который возникает при построении моделей и часто остается в тени, связан с определением численных значений всех констант, фигурирующих в определяющих уравнениях. При попытке ответа на этот вопрос мы неизбежно приходим к необходимости решения так называемых обратных задач, которые сами по себе обычно значительно сложнее, чем прямые. Более того, достаточно очевидно, что обратная задача может быть решена лишь приближенно, и, значит, значения констант можно определить тоже только приближенно. Это непосредственно связано с требованием устойчивости решения, полученного в результате применения конкретной модели при малых возмущениях ее параметров (констант). Поэтому важно иметь оценки погрешностей в определении констант модели. Однако такого рода вопросы в большинстве работ, посвященных построению моделей, не рассматриваются.

За редким исключением, отсутствует термодинамическая проверка, т. е. вывод неравенств, которым должны подчиняться используемые в модели параметры и функции. Практически отсутствует анализ экспериментов, необходимых для определения характеристик данной модели. Однако это важно, т.к. у некоторых моделей количество параметров весьма велико, а, как известно, различные параметры следует определять в независимых опытах, т.е. в таких, в которых реализуется отличный от других вид напряженного состояния.

При построении моделей близкой к идеальной была бы ситуация, когда их проверка проводилась путем решения ряда эталонных задач. К сожалению, к настоящему времени общая точка зрения на то, какими должны быть эталонные задачи, еще не сформировалась и явно не сформулирована.

Литература

1. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах. М.: Изд-во иностранной литературы, 1955. 192 с.
2. Griffith A. A. The phenomena of rupture and flow in solids // *Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A*. 1920. V. 221. P. 163–198.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973. 584 с.
4. Альтшуллер Л. В., Новиков С. А., Дивнов И. И. Связь критических разрушающих напряжений со временем разрушения при взрывном нагружении металлов // *Докл. АН СССР*. 1966. Т. 166. № 1. С. 67–70.
5. Тарасов Ю. И. Исследование зависимости времени разрушения от растягивающей нагрузки для стали и меди // *Докл. АН СССР*. 1965. Т. 165, № 2. С. 323–326.
6. Новиков С. А., Дивнов И. И., Иванов А. Г. Исследование разрушения стали, алюминия и меди при взрывном нагружении // *Физика металлов и металловедение материалов*. 1966. Т. 21, № 4. С. 608–615.
7. Иванов А. Г., Сеницын В. Л., Новиков С. Л. Масштабные эффекты при динамическом разрушении конструкций // *Докл. АН СССР*, т. 194, 1970, № 2. С. 316–317.
8. Златин Н. А., Иоффе Б. С. О временной зависимости сопротивления отрыву при отколе // *Ж. техн. физики*, 1972, т. 43, № 8. С. 174–1744.
9. Златин Н. А., Мочалов С. М., Пугачев Г. С., Врагов А. М. Временные закономерности процесса разрушения металлов при интенсивных нагрузках // *Физика твердого тела*. 1974, т. 16, № 6. С. 1752–1755.
10. Blinkow D. W., Keller D. V. Experiments on the mechanism of spall // *Symp. Dynamic behavior of materials*. Philadelphia. Amer. soc. for testing Mater. 1963. P. 252–263.
11. Butcher B. M., Barker L. M., Munson D. E., Lundergan C. D. Influence of stress history on time-dependent spall in metals // *AIAA Journal*. 1964. V. 2, № 6. P. 977–990.
12. Glass C. M., Moss G. L., Golaski P. K. Effects of explosive loading on single and poly crystalline aggregates // *Response of metals to high velocity deformation*. Eds. Shewmon P. G., Zackay V. F. N.Y.-L. Intersci. Publ. 1961. P. 115–143.
13. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // *Изв. АН СССР. ОТН*. 1958. № 8. 26–31.
14. Работнов Ю. Н. О разрушении вследствие ползучести // *ПМТФ*. 1963. № 2. С. 113–123.
15. Работнов Ю. Н. О разрушении твердых тел // *Проблемы механики твердого деформированного тела*. Л.: Судостроение. 1970. С. 353–357.
16. Ильющин А.А. Об одной теории длительной прочности // *Инж. ж. МТТ*, 1967, № 3. С. 21–35.

17. Наместникова И. В., Шестериков С. А. Векторное представление параметра повреждаемости // Деформация и разрушение твердых тел. М.: Изд-во МГУ, 1985. С. 43–52.
18. Lemaitre J. A continuous damage mechanics model for ductile fracture // Trans. ASME. J. Eng. Mater. and Technol. 1985, V. 107, № 1. P. 83–89.
19. Murakami S., Olmo N. A continuous theory of creep and creep damage // Creep in structures. Berlin: Springer, 1981. P. 422–443.
20. Herman W. Constitutive equation for the dynamic compaction of ductile porous materials // J. Appl. Phys. 1969. V. 40, № 6. P. 2490–2499.
21. Глушко А. И. Исследование откола как процесса образования микропор // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 5. С. 132–140.
22. Swegle J. W. Constitutive equations for porous materials with strength // J. Appl. Phys. 1980. V. 51, № 5. P. 2574–2580.
23. Curran D. R., Seaman L., Shokey D. A. Computational model for ductile and brittle structures // J. Appl. Phys. 1976. v. 47, № 11. P. 4814–4826.
24. Shockey D. A., Seaman L., Curran D. R. The influence of microstructural fractures on dynamic fractures // Metallurgical Effects at High Strain Stress. N.Y.; L.; Plenum Press. 1973. P. 473–499.
25. McClintock F. A. A criterion of ductile fracture by the growth of holes // Trans. ASME. Ser. E. Appl. Mech. 1968. V. 35, № 2. P. 363–371.
26. Eftis J., Nemes J. A., Randles P. W. Viscoplastic analysis of plate-impact spallation // Intern. J. Plastisity. 1991. V. 7, № 1–2. P. 15–39.
27. Ахмадеев Н. Х. Континуальная модель повреждаемой среды. Препринт. Уфа: УрО АН СССР. Отдел физики БНЦ, 1988. 26 с.
28. Ахмадеев Н. Х. Исследование откольного разрушения при ударном деформировании. Модель повреждаемой среды // ПМТФ. 1983. № 4. С. 158–167.
29. Ахмадеев Н. Х., Болотнова Р. Х. Динамическая реакция и разрушение отколом двумерных упругопластических тел при импульсных нагружениях. Уфа: Башк. Филиал АН СССР. 1987. 30 с.
30. Ахмадеев Н. Х., Болотнова Р. Х. К построению неодномерных моделей разрушения отколом // Теория распространения волн в упругих и упругопластических средах. Новосибирск: Ин-т горного дела СО АН СССР. 1987. С. 133–136.
31. Ахмадеев Н. Х., Болотнова Р. Х. К теории неодномерного откольного разрушения твердых тел при импульсном нагружении // Докл. 4-го Всесоюзн. совещ. по детонации. Черноголовка, 1988. Т. 2. С. 218–224.
32. Капель Г. И., Щербань В. В. Пластическая деформация и откольное разрушение железа «армко» в ударной волне // Физика горения и взрыва. 1980. Т. 16. № 4. С. 93–103.
33. Gilman J. J. Dislocation dynamics and the response of materials to impact // Appl. Mech. Rev. 1968. V. 21, № 8. P. 767–783.

34. Рузанов А. И. Численное исследование откольной прочности с учетом микроповреждений // Изв. АН СССР. МТТ. 1984, № 5. С. 109–115.
35. Lemaitre J. Coupled elastoplasticity and damage constitutive equations // Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng. 1985. V. 51, № 1–3. P. 31–49.
36. Шок Р. Поведение горных пород под действием больших напряжений // Удар, взрыв и разрушение. М.: Мир, 1981. С. 116–130.
37. Николаевский В. Н., Лифшиц Л. Д., Сизов И. А. Механические свойства горных пород. Деформации и разрушение // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ, 1978. Т. 11. С. 123–250.
38. Ставрогин А. Н., Протосеня А. Г. Пластичность горных пород. М.: Недра, 1979. 301 с.
39. Григорян С. С. Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения горных пород // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 4. С. 643–669.
40. Слепян Л. И. О волне хрупкого разрушения // Инж. ж. МТТ. 1968. № 4. С. 190–192.
41. Галин Л. А., Черепанов Г. П. О самоподдерживающем разрушении напряженного хрупкого тела // Докл. АН СССР. 1966. Т. 167. № 3. С. 543–546.
42. Николаевский В. Н. Предельная скорость фронта разрушения и динамические перегрузки хрупких материалов. Препринт № 123. М.: Ин-т пробл. механики АН СССР, 1979. 57 с.
43. Maenchen G., Sack S. The Tensor Code // Methods in computational physics. Volume 3. Fundamental Methods in Hydrodynamics. Eds. Alder B. and oth. Academic press. N.-Y.-L. 1964. P. 181–210 = Майнчен Дж., Сак С. Метод расчета «Тензор» // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 185–211.
44. Зеленский А. С., Нещеретов И. И. Учет откольного разрушения в задаче о взаимодействии продольной волны с цилиндрической полостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 125–129.
45. Коротков П. Ф. О математической модели постепенного разрушения горных пород и превращении их в пористые сыпучие среды // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253. № 6. С. 1357–1360.
46. Замышляев Б. В., Евтерев Л. С. Модели динамического деформирования и разрушения грунтовых сред. М.: Наука, 1990. 212 с.
47. Замышляев Б. В., Евтерев Л. С., Кривошеев С. Г., Пилипко Ю. В. Модель динамического деформирования и разрушения горных пород // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293. № 3. С. 268–271.
48. Замышляев Б. В., Евтерев Л. С., Пилипко Ю. В. Квазиупругая модель деформирования скальных грунтов // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264. № 2. С. 326–329.

49. Капустянский С. М., Николаевский В. Н. Количественная формулировка упругопластической дилатансионной модели (на примере песчаника) // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 4. С. 113–123.
50. Капустянский С. М. Упругопластическая дилатансионная модель анизотропных сред // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1985. № 8. С. 50–59.
51. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 324 с.
52. Кондауров В. И. Уравнения релаксационного типа для вязкоупругих сред с конечными деформациями // ПММ, 1985. Т. 49. № 5. С. 791–800.
53. Кондауров В. И., Петров И. Б. Расчет процессов динамического деформирования упруго-пластических тел с учетом континуальности разрушения // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. № 6. С. 1344–1347.
54. Кондауров В. И. Энергетический подход к задаче континуального разрушения твердого тела // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. № 6. С. 17–22.
55. Кондауров В. И. Континуальное разрушение нелинейноупругих тел // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 302–310.
56. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976. 535 с.
57. Кондауров В. И., Никитин Л. В. Теоретические основы реологии геоматериалов. М.: Наука, 1990. 206 с.
58. Григорян С. С., Джанашия С. В., Рыков Г. В. К вопросу о математической модели деформирования и разрушения скальных пород // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 1. С. 133–140.
59. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 1057–1074.
60. Reuss A. Berücksichtigung in der Plastizitätstheorie // Z. angew. Math. Mech. 1930. Bd. 10. № 3. S. 266–274 = Теория пластичности. Под ред. Ю. Н. Работнова. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 452 с.

Комментарии

1. *Статья «О континуальных моделях разрушения твердых тел при нестационарных нагрузках» опубликована в 1999 г. в журнале «Известия Академии наук. Механика твердого тела» по техническим причинам в двух частях: Ч. 1. МТТ. 1999. № 1. С. 124–138 и Ч. 2. МТТ. 1999. № 2. С. 125–138, которые поступили в редакцию, соответственно, 19.02.1997 и 09.04.1997. Авторы – А. И. Глушко, И. И. Нещеретов.*

2. *Работа носила характер обзора, главная цель которого была в рассмотрении используемых при построении моделей физических идей, гипотез и допущений. Этим она выгодно отличалась от многочисленных обзоров, главной целью авторов которых, казалось бы, является цитирование максимального числа статей. Например, в монографии Б. И. Шифрина «Пространственные задачи линейной механики разрушения». М.:*

Физматлит, 2002, посвященной значительно более узкому вопросу, цитируется 433 работы.

3. В опубликованных статьях после анализа работ В. И. Кондаурова был приведен анализ работы Глушко А. И., Нещеретова И. И. «О кинетическом подходе к разрушению горных пород», который в настоящем издании опущен ввиду того, что работа помещена в 7 главе. Отметим, что модель, приведенная в указанной работе, была обобщена на случай конечных деформаций (см. Глушко А. И. Об одном подходе к разрушению горных пород // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 130–135).

Глава 9. Построение моделей многофазных упругих пористых сред

Математические трудности, возникающие при описании поведения пористой среды (ПС), связаны главным образом с ее сложным внутренним строением. В реальных ПС поровое пространство представляет собой густую сеть пор разной формы, соединенных между собой узкими щелями и капиллярными каналами, относительный объем которых значительно меньше относительного объема пор. Вследствие этого все физические величины оказываются быстро осциллирующими, т. е. масштаб, на котором происходит их заметное изменение, много меньше характерных размеров тел. С резким изменением физических величин связана и другая трудность – большие градиенты этих величин.

Чтобы обойти эти трудности, переходят к осреднению всех физических величин (плотности, скорости, напряжений, внутренней энергии) и выводят для них систему осредненных уравнений [1, 2]. Таким способом получают плавно изменяющиеся поля всех физических величин, определенные во всех точках области, занятой ПС. Однако на этом пути возникает новая проблема, суть которой можно пояснить кратко следующим образом. Движение сплошной среды в областях, занятых разными фазами, описывается в общем случае разными системами дифференциальных уравнений. На границах фаз должны выполняться условия непрерывности потоков массы, импульса и энергии. Осреднение уравнений законов сохранения массы, импульса и энергии позволяет получить уравнения движения для средних величин во всей области, занятой ПС. Соотношения на границах фаз при осреднении порождают новые величины – распределенные силы межфазового взаимодействия и распределенные источники энергии и тепла, обусловленные взаимодействием фаз. Метод осреднения не позволяет установить связь между этими величинами и средними значениями плотности, скорости, энергии и т. д. Связь между ними устанавливается с помощью дополнительных постулатов.

При решении многих практически важных задач твердую фазу можно считать абсолютно твердым недеформируемым телом. Однако в ряде задач, например, в задаче о распространении волн, следует учитывать сжимаемость твердой фазы и связанное с этим взаимное влияние свойств твердой и жидких фаз на движение ПС.

При изучении поведения многофазных ПС следует принимать во внимание поверхностные явления на границах фаз. Здесь возникает вопрос – каким образом можно учесть эти явления на границах с помощью

распределенных величин. Естественно предположить, что учет сил поверхностного натяжения должен приводить к каким-то связям между средними давлениями жидких фаз. Впервые такое предположение для трехфазной ПС было сделано Левереттом [3], который предложил формулу, связывающую разность средних давлений с величиной насыщенности одной из фаз. Было дано [4] обобщение закона Леверетта на случай трех жидкостей.

Наиболее полно эта проблема решалась при построении модели трехфазной упругой ПС и более простого частного случая – модели двухфазной ПС [2]. Однако ряд постулатов, на которых базируется такая модель, сформулирован сугубо для трехфазной среды, в связи с чем даже формально не удается обобщить введенные постулаты на случай произвольного числа фаз. Это относится прежде всего к моделированию поверхностных явлений. Ряд важных предположений [2] не подкреплен физическими или иными соображениями в пользу их справедливости. Хотя такие предположения прямо не связаны с тем, что ПС – среда трехфазная, нужно найти недостающие мотивировки, прежде чем обобщить их на любую многофазную среду.

Таким образом, задачу построения модели поведения многофазных упругих сред нельзя считать окончательно решенной. Ниже предлагается подход, с помощью которого удастся построить такую модель при любом числе жидких фаз в отсутствие фазовых переходов и химических реакций. При построении модели ПС здесь не используется локальное определение средних величин и не устанавливается зависимость результата от порядка действий операций дифференцирования и взятия среднего. Исходным положением служит определение средних величин с помощью постулируемых интегральных соотношений для любой области в ПС, справедливость которых принимается в качестве гипотезы.

1. Основные понятия и определения. Будем считать, что ПС состоит из одной твердой фазы и n жидких фаз. Введем некоторые понятия и связанные с ними обозначения. Возьмем произвольную связную область Ω в ПС. Представим Ω в виде объединения двух областей: $\Omega = \Omega\{0\} \cup \Omega\{f\}$. Здесь $\Omega\{0\}$ – область, которую занимает твердая фаза, $\Omega\{f\}$ – поровое пространство. Поровое пространство представим в виде объединения n областей

$$\Omega\{f\} = \Omega\{1\} \cup \Omega\{2\} \cup \dots \cup \Omega\{n\}$$

Здесь $\Omega\{\alpha\}$ – область, которую занимает α -фаза. Обозначим через $\partial\Omega\{\alpha\}$ границу области $\Omega\{\alpha\}$, \mathbf{n}_α – внешнюю нормаль к $\partial\Omega\{\alpha\}$; $\Gamma\{\alpha\} \in \partial\Omega\{\alpha\}$ – границу между α -фазой и другими фазами ПС; $\Gamma\{\alpha\beta\}$ – границу между α -, β -фазами, $\alpha \neq \beta$, $\Gamma\{\alpha\Omega\} = \partial\Omega\{\alpha\} \cap \partial\Omega$. Будем считать, что нормаль

к границам $\Gamma\{\alpha\}$ и $\Gamma\{\alpha\beta\}$ совпадает с \mathbf{n}_α ($\Gamma\{\alpha\beta\} \subset \Gamma\{\alpha\} \subset \partial\Omega\{\alpha\}$). Если границу между α - и β -фазами рассматривать как подмножество $\partial\Omega\{\beta\}$, то она обозначается через $\Gamma\{\beta\alpha\}$ и имеет нормаль \mathbf{n}_β , причем очевидно, что $\mathbf{n}_\alpha = -\mathbf{n}_\beta$.

Из этих определений следуют очевидные соотношения, которые понадобятся ниже при описании процедуры осреднения

$$\partial\Omega\{\alpha\} = \Gamma\{\alpha\} \cup \Gamma\{\alpha\Omega\}, \quad \Gamma\{\alpha\} = \bigcup_{\beta=0}^n \Gamma\{\alpha\beta\}, \quad \beta \neq \alpha,$$

$$\bigcup_{\alpha=0}^n \Gamma\{\alpha\} = \bigcup_{\alpha=0}^n \left(\bigcup_{\beta=0}^n \Gamma\{\alpha\beta\} \right) = \bigcup_{\alpha \neq \beta} \Gamma\{\alpha\beta\}, \quad \alpha \neq \beta$$

При моделировании ПС часто исходят из следующего упрощающего представления. Считают, что поля физических величин можно разложить на сумму двух составляющих: плавно изменяющуюся величину и быстро осциллирующую величину, амплитуда осцилляций которой значительно меньше амплитуды колебаний плавно изменяющейся части [5]. В рамках этих представлений вводится понятие элементарной окрестности $\delta v = \delta v(x)$ каждой точки x ПС. Под такой окрестностью следует понимать шар с центром в точке x , радиус которого много больше характерного расстояния между капиллярами и в то же время меньше характерного расстояния, на котором происходят значительные изменения физических полей [1].

В общем случае распределение капиллярных каналов и пор неравномерно и характеризуется в каждой точке x ПС пористостью $m = m(x, t)$ – относительным объемом порового пространства элементарной окрестности точки $x \in \delta v$. Кроме пористости, важными характеристиками ПС являются относительные объемы фаз m^α , и насыщенности жидких фаз θ_α

$$m^\alpha = |\delta v\{\alpha\}|/|\delta v|, \quad \alpha = 0, 1, \dots, n, \quad \theta_\alpha = m^\alpha/m, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n$$

где $|\delta v\{\alpha\}|$ и $|\delta v|$ – объемы областей $\delta v\{\alpha\}$ и δv , $\delta v\{\alpha\} \subset \delta v$, $\delta v\{\alpha\}$ – часть элементарной окрестности δv , которую занимает α -фаза. Очевидно, что окрестность $\delta v\{\alpha\}$ зависит от точки x . Однако, чтобы не усложнять обозначений, переменную x будем опускать. Легко видеть, что величины m^α и θ_α удовлетворяют соотношениям

$$m^0 + m^1 + \dots + m^n = 1, \quad \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = 1, \quad m^0 = 1 - m$$

Наряду с относительными объемами фаз можно ввести так называемые просветности фаз [2], которые определяются следующим образом. Проведем через точку $x \in \delta v$ произвольную плоскость Π_n с нормалью \mathbf{n} . Рассмотрим сечения окрестностей $\delta v\{\alpha\}$ и δv этой плоскостью

$$\delta S = \delta v \cap \Pi_n, \quad \delta S\{\alpha\} = \delta v\{\alpha\} \cap \Pi_n$$

и введем просветности m_s^α по формуле

$$m_s^\alpha = |\delta S\{\alpha\}| / |\delta S|, \quad \alpha = 0, 1, \dots, n$$

Здесь $|\delta S\{\alpha\}|$ и $|\delta S|$ – площади сечений $\delta S\{\alpha\}$ и δS , соответственно. Очевидно, что в общем случае m_s^α зависит от ориентации плоскости Π_n , так что $m^\alpha \neq m_s^\alpha$. Ниже будут указаны условия (условия регулярности), при которых просветности будут зависеть только от точки ПС. В этом случае будут выполняться равенства $m^\alpha = m_s^\alpha$.

Пусть теперь $g = g(x, t)$ – некоторая физическая величина, заданная в области Ω . Среднее значение $g^\alpha(x, t)$ величины g в точке $x \in \delta v\{\alpha\} \subset \Omega$, соответствующее α -фазе, определяется с помощью соотношения [1, 2]

$$g^\alpha(x, t) = \frac{1}{|\delta v\{\alpha\}|} \iiint_{\delta v\{\alpha\}} g dv, \quad \alpha = 0, 1, \dots, n \quad (1.1)$$

Здесь dv – элемент объема. Аналогично вводятся средние $g_s^\alpha(x, t)$ величины g по сечениям фаз

$$g_s^\alpha(x, t, \Pi_n) = \frac{1}{|\delta S\{\alpha\}|} \iint_{\delta S\{\alpha\}} g ds, \quad \alpha = 0, 1, \dots, n \quad (1.2)$$

Здесь ds – элемент площади. В общем случае g_s^α зависит как от точки $x \in \Omega$, так и от ориентации плоскости Π_n , т. е. от нормали \mathbf{n} , так что среднее по объему не будет равно среднему по сечениям. Более того, определенные таким образом средние величины могут зависеть от формы и размеров элементарной окрестности δv .

Для того чтобы исключить эти зависимости, необходимо потребовать выполнения условия устойчивости [1]

$$\Delta_{\min} < \delta x < \Delta_{\max}, \quad d \ll \Delta_{\min} \ll \Delta_{\max} \ll L$$

Здесь δx – диапазон линейных размеров, L – характерный макроскопический размер, d – размер неоднородностей. Будем считать, что эти условия выполнены. Будем считать также, что выполнены условия регулярности [1]

$$\partial g^\alpha / \partial x \approx \partial g_s^\alpha / \partial x \leq g^\alpha / L$$

Здесь g^o – характерное значение величины g или ее изменения. В этом случае будут выполняться равенства [1]

$$g^{\alpha} = g_S^{\alpha}, \quad m^{\alpha} = m_S^{\alpha} \quad (1.3)$$

Введем величину, играющую важную роль в процедуре осреднения. Возьмем элементарную окрестность точки $x \in \delta v$ и в ней границу между α -фазой и другими фазами. Поскольку в окрестности δv содержится достаточно большое число капиллярных каналов, площадь границы фаз $\Gamma\{\alpha\}$ значительно превышает площадь поверхности элементарной окрестности или площадь любого сечения окрестности δv . В этом случае, опираясь на геометрические соображения, можно ввести величину

$$g_{\Gamma}^{\alpha} = \frac{1}{|\delta v|} \int_{\Gamma\{\alpha\}} g ds \quad (1.4)$$

Отступая от традиционного подхода, определим средние величины другим способом. Будем считать, что справедливы следующие гипотезы:

1) для любой физической величины g , заданной в ПС, существуют величины g^{α} и g_{Γ}^{α} такие, что для любой области Ω в ПС выполняются соотношения

$$\iiint_{\Omega\{\alpha\}} g d v = \iiint_{\Omega} m^{\alpha} g^{\alpha} d v \quad (1.5)$$

$$\iint_{\Gamma\{\alpha\}} g d S = \iiint_{\Omega} g_{\Gamma}^{\alpha} d v \quad (1.6)$$

2) для любой поверхности S в ПС должно выполняться соотношение

$$\iint_{S\{\alpha\}} g ds = \iint_S m^{\alpha} g^{\alpha} ds \quad (1.7)$$

Величины g^{α} будем называть средними значениями, так как из интегральных соотношений (1.5)–(1.7) согласно теореме о среднем вытекают локальные определения средних величин.

Равенство (1.6) далее будем называть условием представимости (заметим, что в литературе этому равенству иногда соотносят и другие термины). С его помощью поверхностные интегралы по границам фаз $\Gamma\{\alpha\}$ выражаются через объемные интегралы и вводятся величины g_{Γ}^{α} . Эти величины в зависимости от физического смысла величины g будут рассматриваться ниже либо как силы межфазного взаимодействия, либо как работа сил межфазного взаимодействия, либо как приток тепла в результате теплообмена между фазами.

Введем обозначения: ρ – плотность, \mathbf{v} – вектор скорости, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформаций, $\mathbf{e}(\mathbf{v})$ – тензор скоростей деформаций, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, p – шаровая часть тензора напряжений в жидких фазах, $p < 0$, $\boldsymbol{\tau}$ – тензор вязких напряжений в жидких фазах (девиатор тензора напряжений в твердой фазе), T – температура, e и s – удельные внутренняя энергия и энтропия, соответственно, \mathbf{q} – вектор потока тепла, \mathbf{f} – плотность массовых сил; t – время, $x = (x_1, x_2, x_3)$ – пространственные координаты, $\nabla \mathbf{v}$ – градиент вектора скорости, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ – свертка двух тензоров \mathbf{a} и \mathbf{b} , $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ – тензорное произведение, тензор \mathbf{a}^T – сопряженный тензору \mathbf{a} .

2. Дифференциальные уравнения для средних величин.

В качестве исходного положения при выводе системы уравнений, которым должны удовлетворять средние величины, будут использоваться интегральные соотношения, соответствующие законам сохранения массы, импульса, энергии и второму началу термодинамики. Ключевую роль при выводе уравнений будут играть соотношения (1.5)–(1.7). Соотношение (1.5) будет использоваться для преобразования интеграла по области $\Omega\{\alpha\}$, которую занимает α -фаза, в интегралы от средних величин по области Ω , а соотношение (1.7) – для преобразования поверхностных интегралов по сечению $S\{\alpha\} = \partial\Omega \cap \partial\Omega\{\alpha\}$ α -фазы в поверхностные интегралы по границе $\partial\Omega$. Наконец, соотношение (1.6) позволит преобразовать поверхностные интегралы по границе $\Gamma\{\alpha\}$ между α -фазой и соседними фазами в объемные интегралы по всей области Ω от новых заранее не известных величин.

Как известно, любой закон сохранения можно записать в виде дифференциального соотношения

$$\partial a / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{b} + c = 0 \quad (2.1)$$

Здесь a, b, c – некоторые физические величины. В классе кусочно-гладких функций это равенство эквивалентно следующему интегральному соотношению

$$\frac{d}{dt} \iiint_G a d v + \iint_{\partial G} (b \cdot \mathbf{n} - a w_n) ds + \iiint_G c d v = 0 \quad (2.2)$$

как это следует из формулы дифференцирования по параметру (времени) интеграла по переменной области $G = G(t)$ [6] и формулы Гаусса-Остроградского. Здесь G – любая кусочно-гладкая область в ПС, \mathbf{n} – внешняя нормаль к границе ∂G области G , \mathbf{w} – вектор скорости движения границы ∂G , $w_n = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$. Вектор \mathbf{w} направлен вдоль нормали \mathbf{n} .

Из равенства (2.2) следуют известные интегральные соотношения, соответствующие законам массы (1), импульса (2) и энергии (3), а также

соотношение, соответствующее второму началу термодинамики (4). Чтобы получить их, нужно подставить в равенство (2.2) вместо a, b, c соответствующие величины:

- (1) $a \Leftarrow \rho, b \Leftarrow -\rho \mathbf{v}, c \Leftarrow 0;$
- (2) $a \Leftarrow \rho \mathbf{v}, b \Leftarrow -\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma}, c \Leftarrow -\rho \mathbf{f};$
- (3) $a \Leftarrow \rho(e + \mathbf{v}^2/2), b \Leftarrow -a\mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q}, c \Leftarrow 0;$
- (4) $a \Leftarrow \rho s, b \Leftarrow -a\mathbf{v} + \mathbf{q}/T, c \Leftarrow \mathbf{q} \cdot \nabla T/T^2$

Покажем теперь, как из равенства (2.2) можно получить интегральные соотношения для средних величин. Возьмем в качестве области G одну из областей $\Omega\{\alpha\} \subset \Omega$, которую занимает α -фаза. Заметим, что области $\Omega\{\alpha\}$ зависят от времени. Границу $\partial\Omega\{\alpha\}$ области $\Omega\{\alpha\}$ можно представить в виде $S\{\alpha\} \cup \Gamma\{\alpha\}$. Поверхность $S\{\alpha\}$ лежит на границе $\partial\Omega$ области Ω , а $\Gamma\{\alpha\}$ – граница между α -фазой и соседними фазами ПС. Поверхность $S\{\alpha\}$ неподвижна и на ней $w_n = 0$, а $\Gamma\{\alpha\}$ – контактная граница, на которой нормальные составляющие скорости одинаковы по обе ее стороны и равны w_n , так что выполняется равенство $w_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_n$. Поэтому поверхностный интеграл по $\partial\Omega\{\alpha\}$ можно записать в виде суммы двух интегралов

$$\iint_{\partial\Omega\{\alpha\}} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} - a w_n) ds = \iint_{S\{\alpha\}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} ds + \iint_{\Gamma\{\alpha\}} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} - a v_n) ds \quad (2.3)$$

Теперь воспользуемся соотношениями (1.5)–(1.7) и получим из соотношений (2.2) и (2.3) интегральные соотношения для средних величин. Для этого преобразуем с помощью выражений (1.5) интегралы по области $\Omega\{\alpha\}$ в интегралы по области Ω ; поверхностный интеграл по $S\{\alpha\}$ – в интеграл по границе $\partial\Omega$ с помощью соотношения (1.7), а интеграл по границе $\Gamma\{\alpha\}$ преобразуем с помощью соотношения (1.6) в объемный интеграл по области Ω от новой заранее не известной величины d^α . Тогда получаем соотношение

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} m^\alpha a^\alpha d v + \iint_{\partial\Omega} m^\alpha b^\alpha \cdot \mathbf{n} ds + \iiint_{\Omega} m^\alpha c^\alpha d v + \iiint_{\Omega} d^\alpha d v = 0 \quad (2.4)$$

Преобразуем интеграл по поверхности $\partial\Omega$ в объемный интеграл по формуле Гаусса – Остроградского, а в первом слагаемом изменим порядок интегрирования и дифференцирования, что возможно, так как область Ω не зависит от времени. Тогда получим интегральное соотношение в виде равенства нулю интеграла по области Ω , из которого в силу произ-

вольности Ω следует, что подынтегральное выражение равно нулю, т. е. для средних величин $a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}(m^\alpha a^\alpha) + \nabla \cdot (m^\alpha b^\alpha) + m^\alpha c^\alpha + d^\alpha = 0 \quad (2.5)$$

где d^α зависит неявным образом от a и b и определяется из соотношения

$$\iint_{\Gamma\{\alpha\}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} - w_n a) ds = \iiint_{\Omega} d^\alpha dv$$

Таким образом, пришли к следующему результату.

Лемма. Пусть задан некоторый закон сохранения вида (2.1). Тогда средние значения $a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha$ ($\alpha = 0, 1, \dots, n$), удовлетворяют неоднородному уравнению дивергентного типа (2.5).

В дифференциальное уравнение (2.5) входит среднее значение b^α потока b , которое в общем случае представляется в виде суммы произведений нескольких физических величин. В связи с этим возникает задача: выразить среднее значение от произведения через средние значения сомножителей [5]. При построении модели ПС эта задача решается следующим образом. Каждую физическую величину f представляют в виде суммы среднего значения f^α и пульсации Δf^α [1]. Теперь на примере произведения двух величин ρv покажем, как из интегрального соотношения (1.5) при одном дополнительном предположении можно получить выражения

$$(\rho v)^\alpha = \rho^\alpha v^\alpha + \Pi_\rho, \quad \Pi_\rho = (\Delta \rho \Delta v)^\alpha$$

В самом деле, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega\{\alpha\}} \rho v dv &= \iiint_{\Omega} m^\alpha (\rho v)^\alpha dv = \iiint_{\Omega} m^\alpha \left(\rho^\alpha v^\alpha + (\rho^\alpha \Delta v)^\alpha + (\Delta \rho v^\alpha)^\alpha + (\Delta \rho \Delta v)^\alpha \right) dv = \\ &= \iiint_{\Omega} m^\alpha \left(\rho^\alpha v^\alpha + (\Delta \rho \Delta v)^\alpha \right) dv + J_\rho + J_v, \quad J_\rho = \iiint_{\Omega\{\alpha\}} \Delta \rho v^\alpha dv, \quad J_v = \iiint_{\Omega\{\alpha\}} \rho^\alpha \Delta v dv \end{aligned}$$

Так как величины $\Delta \rho$ и Δv осциллируют относительно нулевого значения, то по аналогии с теоремой Римана–Лебега из теории рядов Фурье [7] можно предположить, что интегралы J_ρ и J_v также будут близки к нулю и ими можно будет пренебречь. В этом случае получим равенство

$$\iiint_{\Omega} m^\alpha \left(\rho^\alpha v^\alpha + (\Delta \rho \Delta v)^\alpha \right) dv = 0$$

В силу произвольности области Ω и условия $m^\alpha > 0$ из этого соотношения следует приведенное выше представление $(\rho v)^\alpha$ через $\rho^\alpha v^\alpha$ и Π_ρ . Величины типа Π_ρ принято называть пульсационными [1]. Рассуждая анало-

гичным образом, можно представить среднее значение произведения любого конечного числа величин в виде суммы двух слагаемых: произведения средних значений этих величин и пульсационных величин $\Pi_\rho, \Pi_v, \Pi_e, \Pi_s$ как функций скоростей, термодинамических величин и, быть может, их градиентов. Подставляя в уравнение (2.5) вместо $a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha$ соответствующие физические величины, получим дифференциальные уравнения для средних величин. Далее верхний символ α опускается там, где это не приводит к недоразумениям и соотношения записываются единообразно для всех фаз.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \nabla \cdot (m\rho\mathbf{v}) &= \Pi_\rho, \\ \frac{\partial}{\partial t}(m\rho\mathbf{v}) + \nabla \cdot (m\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) &= \nabla \cdot (m\boldsymbol{\sigma}) + m\rho\mathbf{f} + \mathbf{F} + \Pi_v, \\ \frac{\partial}{\partial t}(m\rho(e + \mathbf{v}^2/2)) + \nabla \cdot (m\rho(e + \mathbf{v}^2/2)\mathbf{v}) &= \\ &= \nabla \cdot (m\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot (m\mathbf{q}) + m\rho\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + W + Q + \Pi_e, \\ \frac{\partial}{\partial t}(m\rho s) + \nabla \cdot (m\rho s\mathbf{v}) &= -\nabla \cdot (m\mathbf{q}/T) - (m\mathbf{q}/T) \cdot \nabla T/T + (Q + \tilde{q})/T + \Pi_s \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь $e + \mathbf{v}^2/2$ – полная энергия, \tilde{q} соответствует некомпенсированному теплу, $\tilde{q} \geq 0$, причем $\tilde{q} > 0$ в необратимых процессах [8]. Первое уравнение системы (2.6) соответствует закону сохранения массы, второе – закону сохранения импульса, третье – закону сохранения энергии, четвертое – второму началу термодинамики. Величины \mathbf{F}, W, Q соответствуют величине d^α в (2.5) и вводятся на основе условия представимости (1.6)

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma\{\alpha\}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} ds &= \iiint_{\Omega} \mathbf{F}^\alpha dV, \quad \iint_{\Gamma\{\alpha\}} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} ds = \iiint_{\Omega} W^\alpha dV \\ \iint_{\Gamma\{\alpha\}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds &= \iiint_{\Omega} Q^\alpha dV, \quad \iint_{\Gamma\{\alpha\}} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} ds = \iiint_{\Omega} \frac{Q^\alpha}{T^\alpha} dV \end{aligned} \quad (2.7)$$

Поясним более подробно, каким образом получено четвертое соотношение в (2.7). С учетом условия представимости выражение левой части упомянутого соотношения можно получить только в следующем виде

$$\iint_{\Gamma\{\alpha\}} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) \cdot \mathbf{n} ds = \iiint_{\Omega} \hat{Q}^\alpha dV$$

Предположим, что температура во всем теле одинакова. Тогда левую часть последнего соотношения можно преобразовать следующим образом

$$\iint_{\Gamma\{\alpha\}} (\mathbf{q}/T) \cdot \mathbf{n} ds = \frac{1}{T} \iint_{\Gamma\{\alpha\}} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) ds = \frac{1}{T} \iiint_{\Omega} Q^\alpha dv = \iiint_{\Omega} \frac{Q^\alpha}{T} dv = \iiint_{\Omega} \frac{Q^\alpha}{T^\alpha} dv$$

Чтобы удовлетворить последнему соотношению, величину \hat{Q}^α следует принять в виде Q^α/T^α .

Величина $F = (F^0, F^1, \dots, F^n)$ называется силой межфазного взаимодействия, $W = (W^0, W^1, \dots, W^n)$ – работой сил межфазного взаимодействия, $Q = (Q^0, Q^1, \dots, Q^n)$ – характеризует интенсивность межфазного теплообмена. Чтобы определить эти величины, нужно сделать какие-то физические предположения.

Приведем некоторые оценки пульсационных величин. В ПС величина Π_v , как показывают оценки [1], достаточно мала и Π_v обычно пренебрегают. Далее будем следовать этому предположению. В подавляющем числе приложений рассматриваются движения ПС, при которых пульсации плотности Π_ρ невелики, $|\Delta\rho/\rho| \ll 1$. В этом случае ими можно пренебречь, и записывать уравнение сохранения массы в виде, идентичном первому уравнению (2.6) с нулевой правой частью. Более того, тогда среднюю скорость можно с большой степенью точности считать равной среднemasсовой скорости

$$\mathbf{v}_{sr} = \int_{\delta v\{\alpha\}} \rho \mathbf{v} dv / \int_{\delta v\{\alpha\}} \rho dv$$

В общем случае пульсационные слагаемые Π_s в последнем уравнении (2.6) нельзя считать малыми. В самом деле, согласно определению Π_s имеем

$$\Pi_s^\alpha = m^\alpha (\mathbf{q} \cdot \nabla T / T^2)^\alpha - m^\alpha \mathbf{q}^\alpha \nabla T^\alpha / (T^2)^\alpha = \Pi_1 + m^\alpha \mathbf{q}^\alpha \left((\nabla T)^\alpha - \nabla T^\alpha \right) / (T^2)^\alpha$$

Здесь Π_1 зависит от пульсации потока тепла, температуры и градиента температуры. Так как в ПС градиенты температуры могут быть достаточно велики, то правая часть последнего равенства может оказаться большой, так что пренебрегать ею заранее нельзя.

Оценим величину пульсаций внутренней энергии. Хорошо известно, что в достаточно широком диапазоне внутренняя энергия твердых и жидких тел линейно зависит от температуры. В этом случае пульсации энергии Π_e будут порядка $|\nabla T|$, и значит, пренебрегать ими тоже заранее нельзя. В то же время, по сравнению с пульсациями энтропии они будут значительно меньше, т. к. $\Pi_e \sim \Pi_s / |\nabla T|$. Поэтому с достаточной достовер-

ностью можно считать, что $\Pi_e + \Pi_s \approx \Pi_s$. Это соотношение будет использоваться в разд. 5 при определении Π_s .

Систему (2.6) необходимо дополнить соотношениями, вытекающими из уравнения моментов количества движения. Будем считать, что в исходной ПС отсутствуют эффекты полярности, и, следовательно, тензор $\boldsymbol{\sigma}$ симметричен. Было бы неверным делать из этого вывод о том, что и после осреднения тензор средних напряжений $\boldsymbol{\sigma}^0$ также будет симметричным. В самом деле, возьмем соотношение, которое следует из условия обращения в нуль момента всех внешних сил в состоянии равновесия

$$\nabla_i (\sigma^{ij} \mathbf{e}_j \times \mathbf{r}) + \rho \mathbf{f} \times \mathbf{r} = 0$$

Здесь $\mathbf{e}_j, j = 1, 2, 3$ – векторы базиса, а $\mathbf{r} = r(x)$ – радиус-вектор. Согласно лемме, из этого уравнения вытекает следующее уравнение относительно средних величин

$$(\nabla \cdot (m^0 \boldsymbol{\sigma}^0) + m^0 \rho^0 \mathbf{f}^0) \times \mathbf{r} + m^0 \boldsymbol{\omega} + \mathbf{d}_M = \mathbf{P}_M \quad (2.8)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор с компонентами $\omega_i = e_{ijk} \left((\sigma^0)^{kj} - (\sigma^0)^{jk} \right), e_{ijk}$ – компоненты антисимметричного тензора Леви – Чивита, \mathbf{P}_M – пульсации, равные нулю в состоянии равновесия, а \mathbf{d}_M определяется из соотношения

$$\iint_{\Gamma\{0\}} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \times \mathbf{r} ds = \iiint_{\Omega} \mathbf{d}_M dv$$

и имеет смысл плотности момента сил взаимодействия между твердой и жидкими фазами. В состоянии равновесия первое слагаемое в левой части уравнения (2.8) тождественно равно нулю. Тогда из уравнения (2.8) получим

$$m\boldsymbol{\omega} + \mathbf{d}_M = 0$$

причем, если $\mathbf{d}_M \equiv 0$, то и $\boldsymbol{\omega} \equiv 0$. В противном случае в результате осреднения в модели будут проявляться эффекты полярности. Для количественного описания этих эффектов нужно располагать соответствующими опытными данными. Однако для пористых материалов, с которыми приходится сталкиваться в геомеханике, с большой степенью достоверности можно считать, что $\mathbf{d}_M = 0$. В связи с этим в дальнейшем будем пренебрегать эффектами полярности и считать тензор $\boldsymbol{\sigma}$ симметричным.

Учитывая уравнения неразрывности, левые части уравнения (2.6) можно выразить через полные производные, например,

$$m\rho dv/dt = \partial(m\rho\mathbf{v})/\partial t + \nabla \cdot (m\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})$$

Вместо третьего уравнения в (2.6) можно взять линейную комбинацию второго и третьего уравнения этой системы с коэффициентами $-\mathbf{v}, 1$,

тогда получим соотношение

$$m\rho de/dt = m\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}(\mathbf{v}) - \nabla \cdot (m\mathbf{q}) + Q + W - \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (2.9)$$

Здесь $de/dt = \partial e/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla e$ – полная производная по времени, которая зависит от скорости фазы.

Получим теперь соотношение, которое будет играть ключевую роль ниже. Для этого возьмем линейную комбинацию уравнения (2.9) и последнего уравнения в системе (2.6) с коэффициентами $1, -T$. Тогда придем к следующему соотношению

$$m\rho \left(\frac{de}{dt} - T \frac{ds}{dt} \right) = m\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}(\mathbf{v}) + W - \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{q}} - \Pi_s T \quad (2.10)$$

Это соотношение, также как и (2.9), справедливо для любой фазы и для любых движений ПС.

Наряду с законами сохранения массы, импульса и энергии в твердой фазе должно выполняться следующее кинематическое соотношение [8]

$$d\boldsymbol{\varepsilon}/dt = \mathbf{e}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\nabla \mathbf{v})^t - \nabla \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.11)$$

Это соотношение нельзя представить в дивергентном виде. В разд. 7 будет приведено линеаризованное соотношение типа (2.11), имеющее дивергентный вид.

В заключение этого пункта введем некоторые дополнительные обозначения. Ниже будут получены соотношения, в которые входят суммирования средних значений физических величин по всем фазам ПС, например $\sum_{\alpha} m^{\alpha} e^{\alpha}$, $\sum_{\alpha} m^{\alpha} \rho^{\alpha} e^{\alpha}$. Чтобы упростить запись этих выражений, рассмотрим

в какую-нибудь последовательность $p = (p^0, p^1, \dots, p^n)$ и обозначим через $\langle p \rangle$ и $\langle p \rangle_+$ следующие суммы

$$\langle p \rangle = \sum_{\alpha=0}^n p^{\alpha}, \quad \langle p \rangle_+ = \sum_{\alpha=1}^n p^{\alpha} \quad (2.12)$$

Там, где ясно, что сумма берется по всем положительным значениям индекса, индекс «+» опускается. Пусть далее даны две последовательности $p = (p^0, p^1, \dots, p^n)$ и $q = (q^0, q^1, \dots, q^n)$. Будем обозначать через pq их произведение

$$pq = (p^0 q^0, p^1 q^1, \dots, p^n q^n) \quad (2.13)$$

Аналогично определяется произведение любого числа последовательности, например,

$$m\rho e = (m^0 \rho^0 e^0, m^1 \rho^1 e^1, \dots, m^n \rho^n e^n)$$

Через ∇p будем обозначать последовательность

$$\nabla p = (\nabla p^0, \nabla p^1, \dots, \nabla p^n)$$

Тогда, формула $\langle \nabla \cdot (\text{mpev}) \rangle$ будет обозначать следующее выражение

$$\langle \nabla \cdot (\text{mpev}) \rangle = \sum_{\alpha=0}^n \nabla \cdot (m^\alpha \rho^\alpha e^\alpha \mathbf{v}^\alpha)$$

Пусть теперь $\alpha \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots, n\}$. Обозначим через $[\alpha]$ (соответственно, через (α)) совокупность всех целых чисел от нуля (единицы) до n , исключая α

$$[\alpha] = (\beta \mid \beta \neq \alpha, \beta \in [0, 1, \dots, n]), \quad (\alpha) = (\beta \mid \beta \neq \alpha, \beta \in [1, 2, \dots, n])$$

Приведем тождество, которое будет использоваться ниже. Пусть даны три последовательности $(a^1, a^2, \dots, a^n), (b^1, b^2, \dots, b^n), (c^1, c^2, \dots, c^n)$. Тогда выполняется равенство

$$\langle c \rangle \langle cba \rangle = \langle cb \rangle \langle ca \rangle + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n c^\alpha c^\beta (b^\alpha - b^\beta)(a^\alpha - a^\beta) \quad (2.14)$$

Согласно (2.12), (2.13)

$$\langle c \rangle = \sum_{\alpha=1}^n c^\alpha, \quad \langle cba \rangle = \sum_{\alpha=1}^n c^\alpha b^\alpha a^\alpha, \quad \langle cb \rangle = \sum_{\alpha=1}^n c^\alpha b^\alpha, \quad \langle ca \rangle = \sum_{\alpha=1}^n c^\alpha a^\alpha$$

Чтобы убедиться в справедливости тождества в (2.14), следует раскрыть скобки в двойной сумме справа в (2.14) и привести подобные члены.

Рассмотрим один частный случай, когда выполняются условия

$$\langle b \rangle = 0, \quad c^\alpha = 1, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n \quad (2.15)$$

Тогда из (2.14) получаем

$$\langle ba \rangle = \frac{1}{2n} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n (b^\alpha - b^\beta)(a^\alpha - a^\beta) \quad (2.16)$$

3. Соотношение между средними величинами. Получим теперь два интегральных соотношения, которые связывают предельные значения физических величин на границе фаз $\Gamma\{\alpha\}$ со средними значениями этих величин. Предельные значения этих величин на границе $\partial\Omega\{\alpha\}$ области $\Omega\{\alpha\}$ будем обозначать нижним индексом α , например,

$$\mathbf{v}_\alpha = \lim_{s \rightarrow 0, s < 0} \mathbf{v}(x + \mathbf{n}s, t); \quad x \in \partial\Omega\{\alpha\}$$

Для этого возьмем область $\Omega\{\alpha\}$ и вычислим поверхностный интеграл по $\partial\Omega\{\alpha\}$ от величины $p_\alpha n_\alpha$

$$\iint_{\partial\Omega\{\alpha\}} p_\alpha \mathbf{n}_\alpha dS = \iiint_{\Omega\{\alpha\}} \nabla p dv = \iiint_{\Omega} m^\alpha \nabla p^\alpha dv \quad (3.1)$$

Первое равенство следует из формулы Гаусса – Остроградского, второе – из определения средних величин. С другой стороны, левую часть последнего соотношения преобразуем, учитывая определение средних величин по поверхности (1.7). Получим

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega\{\alpha\}} p_\alpha \mathbf{n}_\alpha ds &= \iint_{\Gamma\{\alpha\Omega\}} p_\alpha \mathbf{n}_\alpha ds + \iint_{\Gamma\{\alpha\}} p_\alpha \mathbf{n}_\alpha ds = \\ &= \iint_{\partial\Omega} m^\alpha p^\alpha \mathbf{n} ds + \iint_{\Gamma\{\alpha\}} p_\alpha \mathbf{n}_\alpha ds = \iiint_{\Omega} \nabla (m^\alpha p^\alpha) dv + \iint_{\Gamma\{\alpha\}} p_\alpha \mathbf{n}_\alpha ds \end{aligned} \quad (3.2)$$

Приравняв правые части равенств (3.1) и (3.2) и вычисля величину $\nabla(m^\alpha p^\alpha)$ по формуле Лейбница, после перегруппировки слагаемых получаем соотношение

$$\iint_{\Gamma\{\alpha\}} p_\alpha \mathbf{n}_\alpha ds = -\iiint_{\Omega} \nabla m^\alpha p^\alpha dv + \iiint_{\Omega} m^\alpha (\nabla p^\alpha - \nabla(p^\alpha)) dv \quad (3.3)$$

из которого следует, что равенство

$$-\iint_{\Gamma\{\alpha\}} p_\alpha \mathbf{n}_\alpha ds = \iiint_{\Omega} \nabla m^\alpha p^\alpha dv \quad (3.4)$$

справедливо тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$\iiint_{\Omega} m^\alpha (\nabla p^\alpha - \nabla(p^\alpha)) dv = 0 \quad (3.5)$$

т. е. в указанном выше смысле операции дифференцирования и взятия среднего значения коммутативны.

Точно такой же результат можно получить и для операции дифференцирования по времени, воспользовавшись соотношением

$$\iint_{\Gamma\{\alpha\}} p_\alpha (\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha) ds = \iiint_{\Omega} p^\alpha \frac{\partial m^\alpha}{\partial t} dv + \iiint_{\Omega} m^\alpha \left(\frac{\partial p^\alpha}{\partial t} - \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)^\alpha \right) dv \quad (3.6)$$

которое следует из интегрального определения средних величин и формулы дифференцирования по параметру интеграла по переменной области.

Из соотношения (3.6) следует, что равенство

$$\iint_{\Gamma\{\alpha\}} p_\alpha (\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha) ds = \iiint_{\Omega} p^\alpha \frac{\partial m^\alpha}{\partial t} dv \quad (3.7)$$

справедливо тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$\iiint_{\Omega} m^{\alpha} \left(\frac{\partial p^{\alpha}}{\partial t} - \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)^{\alpha} \right) dV = 0 \quad (3.8)$$

т. е. в интегральном смысле операции дифференцирования по времени и взятия среднего коммутативны.

Итак, приходим к следующему выводу. Поверхностные интегралы по границе $\Gamma\{\alpha\}$ можно выразить через объемные интегралы по всей области Ω от средних величин по формулам (3.4), (3.7) в случае, если выполняются соотношения (3.5), (3.8). Далее принимаем, что соотношения (3.5), (3.8) справедливы. С другой стороны, соотношения (3.3), (3.6) открывают путь для построения более общей теории, если вместо (3.5), (3.8) принять другие, более точные, предположения.

Из тождества (2.16) и формулы (3.7) следует важное соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta \in [\alpha]} \iint_{\Gamma\{\alpha\beta\}} (p_{\alpha} - p_{\beta}) \mathbf{v}_{\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha} ds &= \sum_{\alpha=0}^n \iint_{\Gamma\{\alpha\}} p_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha} ds = \\ &= \sum_{\alpha=0}^n \iiint_{\Omega} p^{\alpha} \frac{\partial m^{\alpha}}{\partial t} dV = \iiint_{\Omega} m \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial t} p \right\rangle_{+} dV = \\ &= \frac{1}{2n} \iiint_{\Omega} m \sum_{\alpha, \beta=1}^n (p^{\alpha} - p^{\beta}) \left(\frac{\partial \theta_{\alpha}}{\partial t} - \frac{\partial \theta_{\beta}}{\partial t} \right) dV \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta \in [\alpha]} \iint_{\Gamma\{\alpha\beta\}} (p_{\alpha} - p_{\beta}) \mathbf{n}_{\alpha} ds &= \sum_{\alpha=0}^n \iint_{\Gamma\{\alpha\}} p_{\alpha} \mathbf{n}_{\alpha} ds = \\ &= - \sum_{\alpha=0}^n \iiint_{\Omega} p^{\alpha} \nabla m^{\alpha} dV = - \iiint_{\Omega} m \langle p \nabla \theta \rangle_{+} dV = \\ &= - \frac{1}{2n} \iiint_{\Omega} m \sum_{\alpha, \beta=1}^n (p^{\alpha} - p^{\beta}) (\nabla \theta_{\alpha} - \nabla \theta_{\beta}) dV \end{aligned} \quad (3.10)$$

В соотношениях (3.9), (3.10) последние равенства между объемными интегралами следуют из тождества (2.16), которое является частным случаем тождества (2.14) при выполнении условия (2.15).

Интегральное соотношение (3.10) дает связь между скачками давлений на границах сред и разностями фазовых давлений $p^{\alpha} - p^{\beta}$ жидкостей. Можно воспользоваться этим соотношением, чтобы учесть поверхностные явления. В самом деле, если предположить, что фазовые давления не могут быть произвольными и должны удовлетворять некоторым усло-

виям, то из соотношения (3.10) следует, что и скачки давлений на границах не могут быть произвольными. И обратно, поскольку скачки давлений на границах должны удовлетворять закону Лапласа, разности фазовых давлений не могут быть произвольными. На основании этих соображений естественно предположить, опираясь на формулу (3.10), что в состоянии термодинамического равновесия разности фазовых давлений должны удовлетворять условиям

$$p^\alpha - p^\beta = p_c^{\alpha\beta}(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \quad (3.11)$$

где $p_c^{\alpha\beta}$ – некоторые функции, которые должны определяться на основе экспериментальных данных. В разд. 6 еще раз вернемся к соотношению (3.11) при описании поверхностных явлений.

Если сравнить равенства (3.4), (3.7) с условием представимости (1.6), то можно прийти к следующему выводу: соотношения (3.4), (3.7) не только согласуются с соотношением (1.6), но и дают явное выражение для подынтегральной функции в объемном интеграле в правых частях равенств (3.4), (3.7). Формулы (3.4), (3.7) можно установить также из физических соображений и теории размерностей. Этот способ будет изложен в разд. 4.

4. Разложение величин $\mathbf{F}^\alpha, W^\alpha, Q^\alpha$. Сделаем первый шаг к определению величин $\mathbf{F}^\alpha, W^\alpha, Q^\alpha$. Приведем соображения, которые дают основание полагать, что они могут быть представлены в виде

$$\mathbf{F}^\alpha = -p^\alpha \nabla m^\alpha + \mathbf{R}^\alpha, \quad \mathbf{R}^\alpha = \sum_{\beta \in [\alpha]} \mathbf{R}^{\alpha\beta}, \quad \mathbf{R}^{\alpha\beta} = -\mathbf{R}^{\beta\alpha}, \quad \alpha \neq \beta, \quad (4.1)$$

$$W^\alpha = p^\alpha \frac{\partial m^\alpha}{\partial t} + D^\alpha, \quad D^\alpha = \sum_{\beta \in [\alpha]} D^{\alpha\beta} = \sum_{\beta \in [\alpha]} \mathbf{R}^{\alpha\beta} \cdot \mathbf{v}^\beta, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad D^0 = \mathbf{R}^0 \cdot \mathbf{v}^0, \quad (4.2)$$

$$Q^\alpha = \sum_{\beta \in [\alpha]} Q^{\alpha\beta}, \quad Q^{\alpha\beta} = -Q^{\beta\alpha}, \quad \alpha = 0, 1, \dots, n \quad (4.3)$$

В самом деле, тензор напряжения в каждой фазе можно представить в виде суммы шаровой части p и девиатора $\boldsymbol{\tau}$ для твердой фазы (или тензора вязких напряжений для жидких фаз). Тогда интеграл по границе $\Gamma\{\alpha\}$ между α -фазой и соседними фазами можно представить в виде суммы

$$\iint_{\Gamma\{\alpha\}} \boldsymbol{\sigma}_n ds = \iint_{\Gamma\{\alpha\}} p n ds + \iint_{\Gamma\{\alpha\}} \boldsymbol{\tau}_n ds, \quad \boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\tau}_n = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \quad (4.4)$$

Первое слагаемое в правой части равенства (4.4) преобразуем в объемный интеграл по области Ω согласно соотношению (3.4), а второе

запишем на основании условия представимости (1.6) в виде объемного интеграла

$$\iint_{\Gamma\{\alpha\}} \boldsymbol{\tau}_n ds = \iiint_{\Omega} \mathbf{R}^\alpha dv \quad (4.5)$$

(величина \mathbf{R}^α имеет смысл суммарной силы, действующей на α – фазу со стороны соседних фаз на границе $\Gamma\{\alpha\}$). Тогда получим

$$\iint_{\Gamma\{\alpha\}} \boldsymbol{\sigma}_n ds = -\iiint_{\Omega} p^\alpha \nabla m^\alpha dv + \iiint_{\Omega} \mathbf{R}^\alpha dv \quad (4.6)$$

Далее из физических соображений можно прийти к выводу, что поверхностные интегралы по границе $\Gamma\{\alpha\beta\}$, так же как и по границе $\Gamma\{\alpha\}$, могут быть преобразованы в объемные интегралы

$$\iint_{\Gamma\{\alpha\beta\}} \boldsymbol{\tau}_n ds = \iiint_{\Omega} \mathbf{R}^{\alpha\beta} dv$$

Учитывая это соотношение и $\Gamma\{\alpha\} = \bigcup_{\beta} \Gamma\{\alpha\beta\}, \beta \in [\alpha]$, преобразуем левую часть равенства (4.5) к виду

$$\iint_{\Gamma\{\alpha\}} \boldsymbol{\tau}_n ds = \sum_{\beta \in [\alpha]} \iint_{\Gamma\{\alpha\beta\}} \boldsymbol{\tau}_n ds = \iiint_{\Omega} \left(\sum_{\beta \in [\alpha]} \mathbf{R}^{\alpha\beta} \right) dv \quad (4.7)$$

Из соотношений (4.5)-(4.7) следует второе равенство (4.1). Величины $\mathbf{R}^{\alpha\beta}$ можно считать силами, которые действуют на α – фазу со стороны β -фазы на границе $\Gamma\{\alpha\beta\}$. Эти величины обусловлены силами вязкого трения в жидких фазах. По третьему закону Ньютона они должны удовлетворять третьему соотношению (4.1). Эффект поверхностного натяжения здесь не проявляется.

Чтобы прийти к соотношению (4.2), будем исходить из равенства

$$\iint_{\Gamma\{\alpha\}} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{v} ds = \iint_{\Gamma\{\alpha\}} p v_n ds + \iint_{\Gamma\{\alpha\}} \boldsymbol{\tau}_n \cdot \mathbf{v} ds$$

Первый интеграл в правой части преобразуем в объемный интеграл по области Ω согласно соотношению (3.7), а второй преобразуем в объемный интеграл на основе условия представимости

$$\iint_{\Gamma\{\alpha\}} \boldsymbol{\tau}_n \cdot \mathbf{v} ds = \iiint_{\Omega} D^\alpha dv$$

где D^α – величина, которую можно рассматривать как скорость суммарной работы, совершаемой над α -фазой соседними фазами на границе $\Gamma\{\alpha\}$.

Поэтому по тем же самым соображениям, что и выше, D^α для жидких фаз можно представить в виде суммы

$$D^\alpha = \sum_{\beta \in [\alpha]} D^{\alpha\beta}, \quad \iint_{\Gamma\{\alpha\beta\}} \boldsymbol{\tau}_n \cdot \mathbf{v} ds = \iiint_{\Omega} D^{\alpha\beta} d\mathbf{v} \quad (4.8)$$

Величины $D^{\alpha\beta}$, $\alpha \neq \beta$, имеют смысл работы, совершаемой над α -фазой со стороны β -фазы на границе $\Gamma\{\alpha\beta\}$. Из физических соображений ясно, что $D^{\alpha\beta}$ должны зависеть как от сил $\mathbf{R}^{\alpha\beta}$, так и от \mathbf{v}^α . Кроме того, из теории размерностей следует, что должно выполняться соотношение $D^{\alpha\beta} \sim \mathbf{R}^{\alpha\beta} \cdot \mathbf{v}^\beta$.

Отметим еще одно свойство, которым обладает интеграл в левой части второго равенства (4.8). Предположим, что скорости всех соседних фаз постоянны в каждой из областей $\Omega\{\beta\}$, граничащих с $\Omega\{\alpha\}$, а на границе жидких фаз скорости непрерывны. Тогда получим

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma\{\alpha\}} \boldsymbol{\tau}_n \cdot \mathbf{v} ds &= \sum_{\beta \in [\alpha]} \iint_{\Gamma\{\alpha\beta\}} \boldsymbol{\tau}_n \cdot \mathbf{v} ds = \sum_{\beta \in [\alpha]} \mathbf{v}^\beta \cdot \iint_{\Gamma\{\alpha\beta\}} \boldsymbol{\tau}_n ds = \\ &= \sum_{\beta \in [\alpha]} \mathbf{v}^\beta \cdot \iiint_{\Omega} \mathbf{R}^{\alpha\beta} d\mathbf{v} = \sum_{\beta \in [\alpha]} \iiint_{\Omega} \mathbf{R}^{\alpha\beta} \cdot \mathbf{v}^\beta d\mathbf{v} \end{aligned}$$

Можно удовлетворить указанному свойству, а также соотношениям (4.8) и приведенным выше физическим соображениям, если предположить, что выполняется условие

$$\iint_{\Gamma\{\alpha\}} \boldsymbol{\tau}_n \cdot \mathbf{v} ds = \iiint_{\Omega} \mathbf{R}^{\alpha\beta} \mathbf{v}^\beta d\mathbf{v} \quad (4.9)$$

Тогда из (4.9) следует второе соотношение в (4.2).

Вычислим теперь суммарную работу сил межфазного взаимодействия со стороны всех жидких фаз и выделим из этой суммы ту часть, которая обусловлена взаимодействием твердой фазы со всеми жидкими фазами. Предположим еще, что на границе $\Gamma\{0\}$ между твердой фазой и прилегающими жидкими фазами диссипация механической энергии мала. Тогда эта часть суммарной работы должна быть равна с точностью до знака D^0 . Выполним теперь указанные преобразования и получим в результате представление для D^0

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^n D^\alpha &= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=0}^n \mathbf{R}^{\alpha\beta} \cdot \mathbf{v}^\beta = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{R}^{\alpha 0} \cdot \mathbf{v}^0 + \sum_{\alpha,\beta=1}^n \mathbf{R}^{\alpha\beta} \cdot \mathbf{v}^\beta = -D^0 + \sum_{\alpha,\beta=1}^n \mathbf{R}^{\alpha\beta} \cdot \mathbf{v}^\beta, \\ D^0 &= -\sum_{\alpha=1}^n \mathbf{R}^{\alpha 0} \cdot \mathbf{v}^0 = \left(\sum_{\alpha=1}^n \mathbf{R}^{0\alpha} \right) \cdot \mathbf{v}^0 = \mathbf{R}^0 \cdot \mathbf{v}^0 \end{aligned}$$

В случае двухфазной среды ($n=1$) из равенств (4.1)–(4.3) следуют соотношения, которые с точностью до обозначений совпадают с представлениями для сил и работы межфазного взаимодействия и теплообмена, предложенными впервые Х. А. Рахматулиным [9].

Соотношения (3.4), (3.7) были получены в предположении, что операции дифференцирования и взятия среднего в интегральном смысле коммутативны, т.е. выполнены (3.5) и (3.8). К соотношениям (3.4), (3.7) можно прийти и из соображений теории размерностей. А именно, из условия представимости следуют соотношения

$$\iint_{\Gamma\{\alpha\}} p \mathbf{n} ds = \iiint_{\Omega} A^{\alpha} dv, \quad \iint_{\Gamma\{\alpha\}} p v_n ds = \iiint_{\Omega} B^{\alpha} dv \quad (4.10)$$

Здесь $|A^{\alpha}| \sim p^{\alpha} / L$, L – величина, имеющая смысл характерного размера, т. е. имеет размерность длины; $|B^{\alpha}| \sim p^{\alpha} / M$, M – величина, имеющая размерность времени.

Из физических соображений можно прийти к выводу, что интегралы в левых частях соотношений (4.10) тем больше, чем больше число капилляров в области Ω . В одно и то же время относительный объем m^{α} α -фазы также тем больше, чем больше число капилляров в области Ω . Поэтому естественно в качестве величины $1/L$ взять ∇m^{α} , а в качестве $1/M$ взять $\partial m^{\alpha} / \partial t$ и получить в результате соотношения (3.4), (3.7).

Соотношения (4.3) получаются следующим образом. Будем исходить из определения величины Q^{α} по третьей формуле (2.7) и повторим все рассуждения, которые привели к представлению \mathbf{R}^{α} в виде суммы величин $\mathbf{R}^{\alpha\beta}$. Величины $Q^{\alpha\beta}$ можно рассматривать, как скорость притока тепла к α -фазе от β -фазы на границе $\Gamma\{\alpha\beta\}$. Поэтому из закона сохранения энергии следует, что должны выполняться соотношения (4.3).

5. Поверхностные явления. При движении ПС важную роль играют силы поверхностного натяжения, что объясняется следующим образом. Поровое пространство представляет собой густую и разветвленную сеть капилляров и пор. Жидкие фазы, заполняющие поровое пространство, находятся в мелкодисперсном состоянии. В этих условиях характерные размеры мелкодисперсных жидких частиц много меньше характерных размеров макроскопических тел. Отсюда, что суммарная площадь поверхности жидких частиц в поровом пространстве будет намного больше площади поверхности тела. В этом случае поверхностная энергия может оказаться сравнимой с внутренней энергией твердой и жидких фаз, а силы поверхностного натяжения будут сравнимы с напряжениями в твердой и жидких фазах [10]. В результате действия сил поверхностного натяжения

нормальные напряжения на границе фаз будут претерпевать разрыв. Опираясь на условие термодинамического равновесия, можно получить закон Лапласа [10,11], который связывает скачок давлений $\Delta p = p_r - p_e$ со средней кривизной поверхности раздела (p_r и p_e – пределы справа и слева гидростатических давлений при стремлении пространственных координат к поверхности раздела вдоль нормали к этой поверхности). Имеем

$$\Delta p = \alpha(1/R_1 + 1/R_2) \quad (5.1)$$

Здесь α – коэффициент поверхностного натяжения, R_1, R_2 – главные радиусы кривизны нормальных сечений, положительные, если нормаль \mathbf{n} к поверхности совпадает с главной нормалью соответствующего нормального сечения, и отрицательные, если эти нормали имеют противоположные направления.

Возникает вопрос, каким образом в модели ПС, где нет никаких границ фаз, может найти свое отражение закон Лапласа. Дать ответ на этот вопрос, опираясь на процедуру осреднения, непросто. Прежде всего, неясна физическая картина взаимного расположения жидких частиц; неизвестно, как распределены по размерам мелкодисперсные частицы; нужно ли принимать во внимание процессы слияния и дробления частиц. Поэтому приходится делать ряд физических предположений и опираться на феноменологический подход, чтобы учесть поверхностные явления. В теории трехфазных ПС, когда имеются только две жидкие фазы, широко применяется закон Леверетта [3], который связывает разность фазовых давлений жидких фаз с насыщенностью одной из жидкостей

$$\Delta p = \alpha j(\theta) \cos \psi \quad (5.2)$$

Здесь ψ – угол смачивания, который считается известной величиной для заданной пары жидких фаз; $j(\theta)$ – функция Леверетта. Обобщение этого закона на случай, когда число жидкостей равно трем, было дано [4], где предполагалось, что разность фазовых давлений любых двух жидкостей является функцией насыщенностей

$$p^\alpha - p^\beta = p_c^{\alpha\beta}(\theta_1, \theta_2), \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad \alpha \neq \beta \quad (5.3)$$

причем очевидно,

$$p_c^{\alpha\beta} = -p_c^{\beta\alpha}, \quad p_c^{12} + p_c^{23} + p_c^{31} = 0 \quad (5.4)$$

Перейдем теперь к выводу соотношений, связанных с поверхностными явлениями. Прежде всего введем среднюю поверхностную энергию e^c и среднюю поверхностную энтропию s^c . Для этого возьмем в ПС произвольную односвязную область Ω и вычислим в ней поверхностную

энергию E и энтропию S [10]

$$E = \iint_{\Gamma} (\alpha - T\alpha_T) ds, \quad S = -\iint_{\Gamma} T\alpha_{TT} ds \quad (5.5)$$

Здесь Γ – совокупность всех поверхностей между фазами, заключенных в области Ω ; α_T, α_{TT} – первая и вторая производные коэффициента поверхностного натяжения по температуре.

Исходя из условия представимости, выразим поверхностные интегралы через объемные, вводя при этом величины e^c и s^c следующим образом

$$\iint_{\Gamma} (\alpha - T\alpha_T) ds = \iiint_{\Omega} m\rho^c e^c d v, \quad -\iint_{\Gamma} T\alpha_{TT} ds = \iiint_{\Omega} m\rho^c s^c d v \quad (5.6)$$

Здесь в качестве ρ^c можно взять плотность твердой фазы.

Теперь нужно установить соотношение, которым должны удовлетворять величины e^c и s^c . Если исходить из феноменологического подхода, то в соответствии с первым началом термодинамики следует принять, что приращение средней поверхностной энергии de^c равно сумме элементарной работы dA и элементарного притока тепла dq^c

$$m\rho^c de^c = dA + dq^c \quad (5.7)$$

Чтобы решить вопрос о том, в каком виде может быть представлена работа dA , обратимся к следующим соображениям. Вычислим элементарную работу локально. Для этого возьмем одну какую-нибудь поверхность раздела Γ' , выделим на ней элементарную площадку с точкой x и площадью ds . Учитывая формулу для приращения (вариации) δs элемента площади ds при перемещении площадки на расстояние $\delta r = v_n dt$ и закон Лапласа, получим выражение для элементарной работы сил поверхностного натяжения [10]

$$\delta A = \alpha \delta s = -2\alpha H \delta r ds = -\Delta p v_n ds dt$$

Вычислим суммарную работу за интервал времени dt , которая совершается при движении границ Γ , заключенных в области Ω . Имеем

$$\Delta A = \iint_{\Gamma} \delta A = -\iint_{\Gamma} \Delta p v_n ds dt \quad (5.8)$$

Естественно предположить, что на границах между твердой и жидкими фазами силы поверхностного натяжения малы, и ими можно пренебречь. В этом случае скачки нормальных напряжений на этих границах будут равны нулю, и левая часть выражения (3.9) будет совпадать с точностью до множителя с правой частью соотношения (5.8), так как

$$(p_\alpha - p_\beta) \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha = -\Delta p v_n$$

Тогда соотношение (5.8) можно записать в виде

$$\Delta A = \iint_{\Gamma} \delta A = \frac{dt}{2n} \iiint_{\Omega} m \sum_{\alpha, \beta=1}^n (p^{\alpha} - p^{\beta}) \left(\frac{\partial \theta_{\alpha}}{\partial t} - \frac{\partial \theta_{\beta}}{\partial t} \right) dv$$

из которого следует выражение для элементарной работы сил поверхностного натяжения

$$dA = \frac{m}{2n} \sum_{\alpha, \beta=1}^n (p^{\alpha} - p^{\beta}) \left(\frac{\partial \theta_{\alpha}}{\partial t} - \frac{\partial \theta_{\beta}}{\partial t} \right) dt \quad (5.9)$$

Для трехфазной среды ($n = 2$) из соотношения (5.9) получим

$$dA = m(p^1 - p^2) / 2 (\partial \theta_1 / \partial t - \partial \theta_2 / \partial t) dt = m(p^1 - p^2) d\theta_1, \quad d\theta_1 = \partial \theta_1 / \partial t dt$$

что совпадает с формулой для работы dA , постулированной ранее [2].

Подставив соотношение (5.9) в уравнение (5.7), получим

$$m p^c de^c = \frac{m}{2n} \sum_{\alpha, \beta=1}^n (p^{\alpha} - p^{\beta}) (d\theta_{\alpha} - d\theta_{\beta}) + dq^c, \quad d\theta_{\alpha} = \partial \theta_{\alpha} / \partial t dt \quad (5.10)$$

Приращение удельной поверхностной энтропии ds^c свяжем с dq^c соотношением, согласующимся со вторым законом термодинамики,

$$m p^c T^c ds^c = dq^c + dq' \quad (5.11)$$

Здесь dq' – величина, связанная с необратимыми процессами, протекающими при движении границ раздела; T^c – величина, которую формально можно назвать температурой поверхностной фазы [2]. Далее будем считать, что в состоянии равновесия разности фазовых давлений удовлетворяют закону, предложенному ранее [4] для трехфазной среды и обобщенному на случай многофазной среды в следующем виде

$$p^{\alpha} - p^{\beta} - p_c^{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha \neq \beta; \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n \quad (5.12)$$

Аналогично соотношению (5.3) между величинами $p_c^{\alpha\beta}$ выполняются соотношения

$$p_c^{\alpha\beta} = -p_c^{\beta\alpha}, \quad p_c^{\alpha\beta} = p_c^{\alpha\beta}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$$

Кроме того, $p_c^{\alpha\beta}$ должны удовлетворять условиям согласованности, обобщающим второе соотношение (5.4); более подробно об этих условиях будет сказано ниже.

При движении ПС границы между жидкими фазами начинают перемещаться, состояние равновесия нарушается и равенство (5.12) не выполняется. Начинается необратимый процесс выравнивания фазовых давлений, при котором величины, входящие в равенство (5.12),

стремятся к нулю. В этом случае естественно связать их с величиной некомпенсированного тепла dq' и считать, что выполняется соотношение

$$dq' = \frac{m}{2n} \sum_{\alpha, \beta=1}^n (p^\alpha - p^\beta - p_c^{\alpha\beta})(d\theta_\alpha - d\theta_\beta) \quad (5.13)$$

Сложив (5.13) и (5.11), получим уравнение для скорости изменения энтропии

$$m\rho^c T^c ds^c = dq^c + \frac{m}{2n} \sum_{\alpha, \beta=1}^n (p^\alpha - p^\beta - p_c^{\alpha\beta})(d\theta_\alpha - d\theta_\beta) \quad (5.14)$$

Разность (5.10) и (5.14) дает основное уравнение, связывающее de^c, ds^c

$$\rho^c (de^c - T^c ds^c) = \frac{1}{2n} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n p_c^{\alpha\beta} (d\theta_\alpha - d\theta_\beta) \quad (5.15)$$

Можно дать другое обоснование соотношения (5.10) и (5.14), опираясь на математические соображения. Для этого вернемся к формулам (5.5), (5.6), с помощью которых были введены величины e^c и s^c . Вычислим производную по времени от полной поверхностной энергии E ПС, заключенной в области Ω

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_{\Gamma} (\alpha - T\alpha_T) ds$$

и производную от поверхностного интеграла, учитывая формулу дифференцирования по параметру (времени) интеграла по переменной поверхности [6]. Предположим так же, что $\alpha = \alpha(T)$. Тогда получим

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Gamma} \hat{\alpha} ds = \iint_{\Gamma} \left(-2\hat{\alpha}H v_n + \frac{d\hat{\alpha}}{dt} \right) ds$$

Здесь $\hat{\alpha} = \alpha - T\alpha_T, H = 1/2(1/R_1 + 1/R_2)$ – средняя кривизна поверхности,

$$d\hat{\alpha}/dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left((\hat{\alpha}(t + \tau, x + n v_n \tau) - \hat{\alpha}(t, x)) / \tau \right)$$

Вычислим производную $d\hat{\alpha}/dt$, учитывая правило дифференцирования сложной функции,

$$\frac{d\hat{\alpha}}{dt} = c \frac{dT}{dt}$$

Здесь $c = -T\alpha_{TT} = Ts_T^c$. Эту величину можно назвать поверхностной энтропией.

Заменим теперь среднюю кривизну H через скачок давлений Δp из закона Лапласа и будем считать, что $|T\alpha_T/\alpha| \ll 1$. Тогда получим

$$\frac{dE}{dt} = - \iint_{\Gamma} \Delta p v_n ds + \iint_{\Gamma} c \frac{dT}{dt} ds \quad (5.16)$$

Заметим, что первая сумма в правой части выражения (5.16) с точностью до обозначений совпадает с правой частью выражения (5.8). Поэтому в рамках сделанных предположений о силах поверхностного

натяжения эту сумму можно заменить правой частью выражения (3.9). Второе слагаемое – интеграл по поверхности Γ – преобразуем в объемный интеграл на основании условия представимости.

$$\iint_{\Gamma} c \frac{dT}{dt} ds = \iiint_{\Omega} \frac{dq^c}{dt} dv \quad (5.17)$$

Величина dq^c/dt , которая вводится с помощью соотношения (5.17), имеет смысл скорости притока тепла к «поверхностной» фазе.

В результате указанных выше преобразований соотношение (5.16) приводится к виду

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2n} \iiint_{\Omega} m \sum_{\alpha, \beta=1}^n (p^\alpha - p^\beta) \left(\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \theta_\beta}{\partial t} \right) dv + \iiint_{\Omega} \frac{dq^c}{dt} dv$$

из которого следует уравнение (5.10).

Аналогичным образом можно прийти к соотношению (5.11), если исходить из определения энтропии по формуле (5.6); будем дополнительно предполагать, что третья производная α по T мала и ею можно пренебречь. Тогда после некоторых преобразований, аналогичных тем, которые были проделаны выше, придем к соотношению

$$\frac{dS}{dt} = \iint_{\Gamma} T \alpha_{TT} H v_n ds - \iint_{\Gamma} \alpha_{TT} \frac{dT}{dt} ds$$

Преобразуем поверхностные интегралы в объемные с помощью условия представимости. Тогда получим, учитывая определение величины c и величины dq^c/dt с помощью (5.17),

$$-\iint_{\Gamma} \alpha_{TT} \frac{dT}{dt} ds = \iiint_{\Omega} \frac{q^c}{T^c} dv \quad (5.18)$$

$$\iint_{\Gamma} T \alpha_{TT} H v_n ds = \iiint_{\Omega} \frac{q'}{T^c} dv \quad (5.19)$$

Из равенств (5.18), (5.19) следует соотношение (5.11). Однако следует убедиться в том, что формальное определение (5.19) величины q' не противоречит второму началу термодинамики, т.е. должно выполняться условие $q' \geq 0$. Действительно, величина $H v_n$ пропорциональна $\Delta p v_n$, т.е. работе в единицу времени при перемещении границ раздела. Эта работа должна быть знакоопределенной, поскольку из физических соображений можно считать, что такие движения происходят необратимо. Тогда, считая, что α_{TT} не меняет знак, получим, что подынтегральное выражение слева в (5.19) также знакоопределено, так что q' не может менять знак. Установить строго неравенство $q' \geq 0$ с помощью этих рассуждений не удается.

6. Работа внешних сил в ПС. Вычисление пульсаций P_s .

Запишем тензор напряжений в жидких фазах σ^α в виде суммы шарового тензора, который будем называть давлением и обозначать символом p^α , и тензора вязких напряжений τ^α . Введем среднее поровое давление \hat{p} и тензор эффективных напряжений σ

$$\hat{p} = \langle \theta p \rangle_+, \quad \sigma = m^0 (\sigma^0 - \hat{p})$$

Величина \hat{p} имеет простой физический смысл. В самом деле, рассмотрим такие движения ПС, при которых вязкие напряжения малы и ими можно пренебречь, т.е. $\tau^\alpha \cong 0, \alpha = 1, 2, \dots, n$. Вычислим силу $d\mathbf{f}_n$, действующую на ориентированную площадку с нормалью \mathbf{n} и площадью ds

$$d\mathbf{f}_n = (m^0 \sigma^0 + m^1 p^1 + \dots + m^n p^n) \cdot \mathbf{n} ds = (m^0 \sigma^0 + m \hat{p}) \cdot \mathbf{n} ds$$

Так как $m^0 + m = 1$, то из этого выражения следует, что сила $d\mathbf{f}_n$ равна среднему значению двух сил, действующих на выбранную площадку: со стороны твердой фазы, и со стороны жидких фаз.

Тензор эффективных напряжений обладает важным свойством: он обращается в нуль в случае, когда тензор напряжений в твердой фазе σ^0 – шаровой и все его отличные от нуля компоненты равны \hat{p} , т.е. твердая фаза находится в состоянии всестороннего сжатия под действием внешнего давления \hat{p} . Естественно тогда принять это состояние в качестве отчетной конфигурации в твердой фазе и описывать напряженное состояние с помощью тензора эффективных напряжений σ , а не σ^0 .

Следуя этим соображениям, будем рассматривать далее такие движения ПС, при которых мала разность между \hat{p} и шаровой частью p^0 тензора напряжений σ^0 , так что обе эти величины можно отождествить. Это предположение можно переформулировать и с помощью тензора деформации (о котором будет идти речь ниже), считая, что деформации малы.

Найдем связь между пульсационными величинами в равенстве (2.10) и \mathbf{R}^{ab} . Так как твердая фаза считается упругой, а в жидких фазах диссипация механической энергии обусловлена действием сил вязкого трения, то должны выполняться соотношения:

$$\tilde{\mathbf{q}}^0 = 0, \quad \tilde{\mathbf{q}}^\alpha = \tau^\alpha : \mathbf{e}(\mathbf{v}^\alpha), \quad \alpha = 1, \dots, n$$

Далее из соотношений (4.1) и (4.2) можно получить следующее равенство

$$W - \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = p \frac{dm}{dt} + \hat{W}, \quad \hat{W} = (\hat{W}^0, \hat{W}^1, \dots, \hat{W}^n)$$

$$\hat{W}^0 = 0, \quad \hat{W}^\alpha = \sum_{\beta \in [\alpha]} \mathbf{R}^{\alpha\beta} \cdot (\mathbf{v}^\beta - \mathbf{v}^\alpha), \quad \alpha = 1, \dots, n$$

Можно представить производную по времени от относительных объемов

$$\frac{dm}{dt} = m \left(p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) - \nabla \cdot \mathbf{v} \right)$$

С учетом последних соотношений уравнение (2.10) приводится к виду

$$m\rho \left(\frac{de}{dt} - T \frac{ds}{dt} - p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right) - A = \hat{W} - \Pi_s T \quad (6.1)$$

$$A = (A^0, A^1, \dots, A^n), \quad A^0 = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}(\mathbf{v}^0), \quad A^\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n$$

Покажем, что обе части этого равенства должны обращаться в нуль. В самом деле, справа стоит разность двух величин, каждая из которых не зависит от производных по времени, левая же часть этого соотношения может принимать как положительные, так и отрицательные значения в зависимости от знака производных по времени. Учитывая, что равенство (6.1) должно выполняться для любых движений ПС, отсюда заключаем, что обе части соотношения (6.1) должны обращаться в нуль. Из обращения в нуль правой части следует, что

$$\Pi_s^0 = 0, \quad \Pi_s^\alpha = \sum_{\beta \in [\alpha]} \frac{\mathbf{R}^{\alpha\beta}}{T^\alpha} \cdot (\mathbf{v}^\beta - \mathbf{v}^\alpha), \quad \alpha = 1, \dots, n$$

Сложив левые и правые части равенства (6.1) при всех значениях $\alpha = 0, 1, \dots, n$ после перегруппировки слагаемых получим

$$\left\langle m\rho \frac{de}{dt} \right\rangle = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}(\mathbf{v}^0) + \left\langle \frac{m\rho}{\rho_0} p \frac{d\xi}{dt} \right\rangle + \left\langle m\rho T \frac{ds}{dt} \right\rangle \quad (6.2)$$

Здесь $\xi^\alpha = \rho_0^\alpha / \rho^\alpha - 1$ – величина, называемая дилатансией, ρ_0^α – значение плотности α -фазы в отсчетной конфигурации.

Аналогично сложив уравнения для энтропии из системы (2.6) при всех значениях $\alpha = 0, 1, \dots, n$ и прибавив к полученному равенству уравнение (5.14), учитывающее поверхностные явления, получим

$$\begin{aligned} \left\langle m\rho \frac{ds}{dt} \right\rangle + m\rho^c \frac{ds^c}{dt} &= -\nabla \cdot \mathbf{J} + \mathcal{X}_q + \mathcal{X}_R + \mathcal{X}_Q + \mathcal{X}_\theta + \mathcal{X}_\tau \\ \mathbf{J} &= \left\langle \frac{m\mathbf{q}}{T} \right\rangle, \quad \mathcal{X}_q = -\left\langle \frac{m\mathbf{q}}{T} \cdot \frac{\nabla T}{T} \right\rangle, \quad \mathcal{X}_R = \left\langle \frac{\hat{W}}{T} \right\rangle, \quad \mathcal{X}_Q = \left\langle \frac{Q}{T} \right\rangle, \\ \mathcal{X}_\theta &= \sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{m}{2nT^c} \left(\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \theta_\beta}{\partial t} \right) (p^\alpha - p^\beta - p_c^{\alpha\beta}), \quad \mathcal{X}_\tau = \left\langle \boldsymbol{\tau} : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \right\rangle_+ \end{aligned} \quad (6.3)$$

7. Малые деформации. Все соотношения, которые были получены до сих пор, справедливы при любых деформациях, так что не было необходимости указывать явно, какое состояние в твердой фазе принимается за отсчетную конфигурацию.

Наиболее интересным и важным с точки зрения приложений представляется исследование движений ПС в случае, когда среднее поровое давление $\langle \theta p \rangle_+$ достаточно велико, так что твердая фаза находится в поле больших сжимающих напряжений. Для таких движений естественно взять в качестве отсчетной конфигурации в твердой фазе состояние всестороннего сжатия, когда тензор напряжений – шаровой и все его отличные от нуля компоненты равны среднему поровому давлению p_0 . Тензор эффективных напряжений в этом состоянии тогда будет нулевым.

Обозначим значения относительных объемов, фазовых температур, энтропий, плотности, и давлений в этом состоянии через $m_0^\alpha, T_0^\alpha, s_0^\alpha, \rho_0^\alpha, p_0^\alpha$. Рассмотрим теперь такие движения ПС, при которых тензор деформаций относительно выбранной отсчетной конфигурации мал. Также будем полагать, что конвективные члены малы. Тогда полная производная по времени для каждой фазы будет равна частной производной по времени. Будем обозначать эту производную точкой над соответствующей физической величиной. Введем величины $\rho E = \langle m_0 \rho_0 e \rangle, \rho = \langle m_0 \rho_0 \rangle, \eta^\alpha = m_0^\alpha (m_0^0 \xi^0 + m_0 \xi^\alpha) / m_0, \alpha = 1, 2, \dots, n; s_\Delta^\alpha = s^\alpha - s_0^\alpha, \alpha = 0, 1, \dots, n$, и покажем, что при малых деформациях и конвективных членах справедливы соотношения

$$m^\alpha \cong m_0^\alpha, \quad \rho^\alpha \cong \rho_0^\alpha, \quad (7.1)$$

$$\left\langle m \rho \frac{de}{dt} \right\rangle \cong \rho \frac{dE}{dt}, \quad \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} \cong \mathbf{e}(\mathbf{v}^0), \quad \left\langle m \rho p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right\rangle \cong \left\langle p \frac{d\eta}{dt} \right\rangle_+ \quad (7.2)$$

Равенства (7.1) достаточно очевидны. Первое соотношение (7.2) следует из определения величины E . Чтобы убедиться в справедливости второго соотношения (7.2), отбросим в равенстве (2.11) нелинейные члены, осредним полученное уравнение и применим лемму. Тогда получим

$$\frac{\partial(m^0 \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[\nabla(m^0 \mathbf{v}^0) + (\nabla(m^0 \mathbf{v}^0))^t \right] = \mathbf{d}_\varepsilon \quad (7.3)$$

где

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{d}_\varepsilon dv = \iint_{\Gamma\{0\}} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{v}^0 + \mathbf{v}^0 \otimes \mathbf{n} - w_n \boldsymbol{\varepsilon}) ds \quad (7.4)$$

В дальнейшем величина \mathbf{d}_ε принимается равной нулю, так как, во-первых, третье слагаемое в подынтегральном выражении (7.4) мало в силу малости самого тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$ и, во-вторых, при достаточно густой сети капилляров поверхностными интегралами от первых двух слагаемых

можно пренебречь в силу быстрых колебаний относительно нулевого значения подынтегральных выражений.

Чтобы получить второе соотношение (7.2), выполним операции дифференцирования в соотношении (7.3) по правилу Лейбница и учтем, что в рамках сделанных предположений справедливо приближенное равенство

$$\varepsilon dm^0/dt + \nabla m^0 \otimes \mathbf{v}^0 + \mathbf{v}^0 \otimes \nabla m^0 \approx 0$$

Последнее соотношение (7.2) следует из определения ξ^α и следующих преобразований:

$$\begin{aligned} \langle mpp d(p^{-1})/dt \rangle &= m^0 \rho^0 p^0 / \rho_0^0 d\xi^0/dt + \langle mpp d\xi/dt \rangle_+ \cong \\ &\cong m_0^0 d\xi^0/dt \langle p\theta \rangle_+ + \langle m_0 p\theta d\xi^0/dt \rangle_+ = \langle p\theta d(m_0^0 \xi^0 + m_0 \xi) / dt \rangle_+ \cong \left\langle p \frac{d\eta}{dt} \right\rangle_+ \end{aligned}$$

где использовано принятое ранее приближенное равенство

$$p^0 \cong \hat{p} = \langle \theta p \rangle_+ \quad (7.5)$$

Заметим, что в рамках принятых допущений соотношение (7.5) можно получить из следующих простых соображений. В начальном состоянии по определению справедливо равенство

$$p_0^0 = p_0 = \sum_{\alpha=1}^n \theta_\alpha p_0^\alpha = \langle \theta p_0 \rangle_+$$

Поскольку рассматриваются движения при малых отклонениях от начального состояния, можно считать, что с точностью до малых второго порядка соотношение (7.5) справедливо при всех допустимых движениях ПС.

Учитывая соотношения (7.2), равенство (6.2) можно записать в виде

$$\rho \frac{dE}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \frac{d\varepsilon}{dt} + \langle p \cdot \eta \rangle_+ + \left\langle m_0 \rho_0 T \frac{ds_\Delta}{dt} \right\rangle \quad (7.6)$$

Из этого равенства можно получить определяющие соотношения, если считать, что внутренняя энергия E – функция величин $\varepsilon, \eta, s_\Delta$. В этом случае, учитывая правило дифференцирования сложной функции и взаимную независимость величин $\varepsilon, \eta, s_\Delta$, из равенства (7.6) получим соотношения

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial E}{\partial \varepsilon}, \quad p = \rho \frac{\partial E}{\partial \eta}, \quad m_0 \rho_0 T = \rho \frac{\partial E}{\partial s_\Delta} \quad (7.7)$$

Естественно предположить, что они задают взаимно однозначное соответствие между системой величин $\varepsilon, \eta, s_\Delta$ и системой величин $\boldsymbol{\sigma}, p, T$. Тогда, наряду с соотношениями (7.7), существуют и обратные зависимости

$$\varepsilon = \varepsilon(\boldsymbol{\sigma}, p, T), \quad \eta = \eta(\boldsymbol{\sigma}, p, T), \quad s_\Delta = s_\Delta(\boldsymbol{\sigma}, p, T) \quad (7.8)$$

Чтобы найти их, можно воспользоваться термодинамическим потенциалом $H = H(\boldsymbol{\sigma}, p, T)$, который определяется равенством

$$\rho H(\boldsymbol{\sigma}, p, T) = \rho E(\boldsymbol{\varepsilon}, \eta, s_\Delta) - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} - \langle p\eta \rangle_+ - \langle m_0 \rho_0 T s_\Delta \rangle \quad (7.9)$$

и совпадает с точностью до знака с преобразованием Лежандра функции $E = E(\boldsymbol{\varepsilon}, \eta, s_\Delta)$ [12, 13]. Подчеркнем, что величины $\boldsymbol{\varepsilon}, \eta, s_\Delta$ считаются связанными с $\boldsymbol{\sigma}, p, T$ зависимостями (7.8). Учитывая определение преобразования Лежандра [13], можно сразу записать соотношения

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\rho \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \eta = -\rho \frac{\partial H}{\partial p}, \quad m_0 \rho_0 s_\Delta = -\rho \frac{\partial H}{\partial T} \quad (7.10)$$

Примем естественное при малых деформациях предположение, что внутренняя энергия E – выпуклая функция своих аргументов. Так как преобразование Лежандра выпуклой функции – выпуклая функция [12], термодинамический потенциал H также будет вогнутой функцией.

Получим теперь явные выражения определяющих соотношения при малых η, s_Δ и малых деформациях; можно ограничиться разложением внутренней энергии по степеням $\boldsymbol{\varepsilon}, \eta, s_\Delta$ до второго порядка малости. Термодинамический потенциал, соответствующий такому разложению E , будет квадратичной формой относительно $\boldsymbol{\sigma}, p_\Delta, T_\Delta$, где

$$p_\Delta = (p_\Delta^1, p_\Delta^2, \dots, p_\Delta^n), \quad T_\Delta = (T_\Delta^1, T_\Delta^2, \dots, T_\Delta^n), \quad p_\Delta^\alpha = p^\alpha - p_0^\alpha, \quad T_\Delta^\alpha = T^\alpha - T_0^\alpha$$

В самом деле, формула Тейлора для функции $E = E(\boldsymbol{\varepsilon}, \eta, s_\Delta)$ имеет вид (опускаем остаточный член третьего порядка малости)

$$E = E_{s_\Delta} + E_\eta \eta + E_2 \quad (7.11)$$

Здесь E_{s_Δ}, E_η – первые производные по переменным s_Δ и η при нулевом значении аргументов, $E_2 = E_2(\boldsymbol{\varepsilon}, \eta, s_\Delta)$ – квадратичная форма. Так как

$$\rho E_{s_\Delta} = m_0 \rho_0 T_0, \quad \rho E_\eta = p_0,$$

то выражение (7.9) приводится к виду

$$\rho H = \rho E_2 - \langle m_0 \rho_0 (T - T_0) s_\Delta \rangle - \langle m_0 \rho_0 (p - p_0) \eta \rangle_+ - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

Поскольку определяющие соотношения линейны, из равенства (7.11) следует, что $\boldsymbol{\varepsilon}, \eta, s_\Delta$ можно представить в виде линейных функций относительно $T - T_0, p - p_0, \boldsymbol{\sigma}$. Следовательно, H – квадратичная форма по переменным $T - T_0, p - p_0, \boldsymbol{\sigma}$. Будем считать, что функция H представляется в виде

$$\begin{aligned} -2\rho H = & (H_{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) + (H_{pp} p_\Delta, p_\Delta) + (H_{TT} T_\Delta, T_\Delta) + (H_{\boldsymbol{\sigma}p} p_\Delta, \boldsymbol{\sigma}) + \\ & + (H_{p\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\sigma}, p_\Delta) + (H_{pT} T_\Delta, p_\Delta) + (H_{Tp} p_\Delta, T_\Delta) + (H_{\boldsymbol{\sigma}T} T_\Delta, \boldsymbol{\sigma}) + (H_{T\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\sigma}, T_\Delta) \end{aligned} \quad (7.12)$$

Здесь $H_{\sigma\sigma}, H_{pp}, \dots$ – линейные операторы. Например, оператор $H_{p\sigma}$ задает линейное отображение из пространства напряжений (пространства двухвалентных тензоров) в n -мерное пространство, а $H_{\sigma p}$ – отображение из n -мерного пространства в пространство тензоров напряжений. В координатном представлении эти операторы можно записать в виде

$$(H_{p\sigma}\boldsymbol{\sigma})^m = \frac{\partial^2 H}{\partial p^m \partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij}, \quad (H_{\sigma p} p)_{ij} = \frac{\partial^2 H}{\partial \sigma_{ij} \partial p^m} p^m, \quad m=1,2,\dots,n, \quad i,j=1,2,3$$

Соответствующие билинейные формы будут записываться следующим образом:

$$(H_{p\sigma}\boldsymbol{\sigma}, p_{\Delta}) = (H_{\sigma p} p_{\Delta}, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial^2 H}{\partial p^m \partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij} p_{\Delta}^m$$

Для справедливости первого равенства нужно предположить равенство вторых смешанных производных функции H .

Прежде чем записать явное разложение термодинамического потенциала по малым приращениям аргументов, сформулируем физические предположения о свойствах ПС.

1°. Твердая фаза изотропна, причем распределение капиллярных каналов и пор также изотропно.

2°. Энтропия твердой фазы зависит от ее собственной фазовой температуры и средних значений тензора напряжений в твердой фазе.

3°. Энтропия каждой жидкой фазы зависит от ее фазовой температуры и ее фазового давления.

4°. Среднее значение тензора деформаций в твердой фазе зависит от эффективных напряжений, ее фазовой температуры и фазовых давлений жидких фаз.

5°. Дилатансия каждой жидкой фазы зависит от соответствующей фазовой температуры, фазового давления и эффективных напряжений.

Из предположения 1° следует, что термодинамический потенциал будет зависеть от инвариантов тензора эффективных напряжений J_1, J_2, J_3 , фазовых температур T^{α} и фазовых давлений жидких фаз p^{α} . Зависимостью от третьего инварианта можно пренебречь, так как учет этой величины в разложении термодинамического потенциала дает вклад только в члены третьего порядка малости.

Чтобы удовлетворить предположениям 1°–5°, нужно взять следующие представления для билинейных форм из соотношения (7.12):

$$(H_{\sigma\sigma}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1+\nu}{E} \left(J_2 - \frac{\nu}{1+\nu} J_1^2 \right), \quad (H_{pp} p_{\Delta}, p_{\Delta}) = \sum_{i=1}^n m^i \gamma^i (p_{\Delta}^i)^2 = \langle m \gamma p_{\Delta} p_{\Delta} \rangle_+,$$

$$\begin{aligned}
 (H_{TT}T_\Delta, T_\Delta) &= \sum_{i=0}^n m^i c^i \frac{(T_\Delta^i)^2}{T_0^i} = \left\langle mc \frac{T_\Delta T_\Delta}{T_0} \right\rangle, \\
 (H_{\sigma p} p_\Delta, \sigma) &= \frac{\partial^2 H}{\partial J_1 \partial p^i} p_\Delta^i J_1 = J_1 \left(\sum_{i=1}^n m^i \beta^i p_\Delta^i \right) = J_1 \langle m\beta p_\Delta \rangle_+, \quad (7.13) \\
 (H_{\sigma T} T_\Delta, \sigma) &= \frac{\partial^2 H}{\partial J_1 \partial T_\Delta^i} T_\Delta^i J_1 = -\alpha^\sigma T_\Delta^0 J_1, \\
 (H_{Tp} p_\Delta, T_\Delta) &= \frac{\partial^2 H}{\partial T^i \partial p^j} p_\Delta^j T_\Delta^i = \sum_{i=0}^n m^i \alpha^i p_\Delta^i T_\Delta^i = \langle m\alpha p_\Delta T_\Delta \rangle
 \end{aligned}$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга, α^σ, α^i – коэффициенты объемного расширения, β^i и γ^i – сжимаемость, c^i – произведение теплоемкости на плотность.

Представления для $H_{\sigma\sigma}$ и $H_{\sigma p}$ следует из предположения 1°. Предположения 2° и 3° приводят к представлениям для $H_{TT}, H_{T\sigma}$ и H_{Tp} , а из предположения 5° следует представление для H_{pp} . Предположение 4° выполняется тогда автоматически.

Подставим теперь выражения (7.12) при учете представлений (7.13) в равенства (7.10) и запишем определяющие соотношения в виде

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \varepsilon_\sigma + \varepsilon_p + \varepsilon_T, \quad \varepsilon_\sigma = \frac{1+\nu}{E} \left(\sigma - \frac{\nu}{1+\nu} J_1 I_1 \right), \quad \varepsilon_p = \langle m\beta p_\Delta \rangle_+ I_1, \quad \varepsilon_T = -\alpha^\sigma T_\Delta^0 I_1, \\
 \eta^k &= \eta_\sigma^k + \eta_p^k + \eta_T^k, \quad \eta_\sigma^k = m_0^k \beta^k J_1, \quad \eta_p^k = m_0^k \gamma^k p_\Delta^k, \quad \eta_T^k = m_0^k \left(\frac{m_0^0}{m_0} \alpha^0 T_\Delta^0 + \alpha^k T_\Delta^k \right), \quad (7.14)
 \end{aligned}$$

$$m_0^0 \rho_0^0 s_\Delta^0 = -\alpha^\sigma J_1 + m_0^0 \alpha^0 p_\Delta^0 + m_0^0 c^0 T_\Delta^0 / T_0^0, \quad \rho_0^k s_\Delta^k = \alpha^k p_\Delta^k + c^k T_\Delta^k / T_0^k$$

Здесь $k = 1, 2, \dots, n$; I_1 – единичный тензор. Выражение для ε_p можно преобразовать к следующему виду

$$\varepsilon_p = \langle m\beta p_\Delta \rangle_+ I_1 = \langle m\beta \rangle_+ p_\Delta^0 I_1 + \frac{1}{2m_0} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n m_0^l m_0^k (\beta^l - \beta^k) (p^l - p^k - p_0^l + p_0^k) I_1 \quad (7.15)$$

Для этого нужно воспользоваться тождеством (2.14), в котором заменить c^l на m_0^l , b^l на β^l , a^l на p_Δ^l , и учесть соотношения

$$\langle m_0 \rangle_+ = m_0, \quad \langle m_0 p_\Delta \rangle_+ = m_0 p_\Delta^0$$

Забегая вперед, скажем, что при некоторых дополнительных предположениях учет сил поверхностного натяжения позволяет получить приближенное равенство

$$p^\alpha - p^\beta = p_c^{\alpha\beta} (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) = p_c^{\alpha\beta} (\theta)$$

В этом случае разность $p^l - p^k$ в выражении (7.15) заменяется на $p_c^{lk}(\theta)$. Например, для трехфазной ПС, когда число жидких фаз равно двум, имеем

$$\varepsilon_p = \langle m\beta \rangle_+ p_\Delta^0 I_1 + m_0^1 m_0^2 (\beta^1 - \beta^2) (p_c^{12}(\theta) - p_c(\theta_0)) I_1 / m_0 \quad (7.16)$$

Здесь $\theta = \theta_1$ – насыщенность первой фазы, а θ_0 – насыщенность в начальном состоянии и определяется как решение уравнения

$$p_c(\theta_0) = p_0^{12} = p_0^1 - p_0^2$$

В другом частном случае, когда имеется только одна жидкая фаза, из первого равенства (7.10) следует выражение

$$\varepsilon_p = m_0 \beta p_\Delta^0 I_1, \quad \beta = \beta_1$$

которое можно получить и из равенства (7.16), если положить $m_0^2 = 0$.

Интересно сравнить представление тензора деформаций в виде (7.16) с его выражением в [2], где в изотермическом случае тензор деформаций представляется в виде

$$\varepsilon = \varepsilon^f + \varepsilon^p + \varepsilon^0$$

Слагаемым даются следующие определения: « ε^f – деформация переупаковки, ε^p – деформация, вызываемая изменением плотности материала твердых частиц, ε^0 – деформация, вызываемая изменением капиллярных сил». Такое представление опирается на эвристические соображения, а не на гипотезы, принятые для описания трехфазной пористой среды. В частности, величина

$$\varepsilon^0 = \beta^0 (p_c(\theta) - p_c(\theta_0)) / 3$$

которая появляется в [2] как *deux ex machine*, тем не менее, совпадает с точностью до обозначений со вторым слагаемым в правой части выражения (7.16).

8. Малые деформации и конвективные члены. Соотношения между обобщенными термодинамическими силами и потоками. Воспользуясь соотношением (6.3), получим соотношения, которые позволяют выразить $q^\alpha, R^{\alpha\beta}, Q^{\alpha\beta}$ и $d\theta_\alpha/dt - d\theta_\beta/dt$ через величины $\nabla T^\alpha, v^\alpha - v^\beta, 1/T^\alpha - 1/T^\beta, p^\alpha - p^\beta - p_c^{\alpha\beta}$.

Введем сначала среднюю энтропию s ПС по формуле

$$\rho s = \langle m_0 \rho_0 s \rangle + m \rho_0^c s^c$$

а также новые обозначения для величин, которые входят в правую часть равенства (6.3)

$$X^\alpha = -\frac{m_0^a q^a}{T^\alpha}, \quad x_\alpha = \frac{\nabla T^\alpha}{T^\alpha}, \quad r_{0\alpha} = -r_{\alpha 0} = \frac{(v^\alpha - v^0)}{T^\alpha}, \quad q_{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{T^\alpha} - \frac{1}{T^\beta} \right), \quad \alpha, \beta = 0, 1, \dots, n,$$

$$r_{\alpha\beta} = (v^\beta - v^\alpha) \left(\frac{1}{T^\alpha} + \frac{1}{T^\beta} \right), \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n, \quad \alpha \neq \beta$$

В соответствии с представлениями термодинамики неравновесных процессов величины $X^\alpha, Y^{\alpha\beta}, R^{\alpha\beta}, Q^{\alpha\beta}$ будем считать обобщенными термодинамическими силами, а величины $x_\alpha, y_{\alpha\beta}, r_{\alpha\beta}, q_{\alpha\beta}$ – обобщенными термодинамическими потоками. Будем обозначать через $x = \{x_\alpha\}, y = \{y_{\alpha\beta}\}, r = \{r_{\alpha\beta}\}, q = \{q_{\alpha\beta}\}$ совокупность всех потоков $x_\alpha, y_{\alpha\beta}, r_{\alpha\beta}, q_{\alpha\beta}$ соответственно.

Пренебрегая малыми конвективными членами, левую часть равенства (6.3) можно представить в виде

$$\langle m\rho ds/dt \rangle + m_0\rho^c ds^c/dt \cong \rho ds/dt$$

и записать соотношение (6.3) в новых обозначениях следующим образом:

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot J + X, \quad X = \mathcal{X}_q + \mathcal{X}_R + \mathcal{X}_Q + \mathcal{X}_\theta + \mathcal{X}_\tau, \quad (8.1)$$

$$\mathcal{X}_q = \sum_{\beta=0}^n X^\beta x_\beta, \quad \mathcal{X}_R = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=[\alpha]}^n R^{\alpha\beta} r_{\alpha\beta}, \quad \mathcal{X}_Q = \sum_{\alpha,\beta=0}^n Q^{\alpha\beta} q_{\alpha\beta}, \quad \mathcal{X}_\tau = \sum_{\beta=1}^n \tau^\beta \cdot \mathbf{e}(\mathbf{v}^\beta)$$

Величина $\nabla \cdot J$ связана с обратимыми процессами теплообмена и может быть как положительной, так и отрицательной. Величина X обусловлена необратимыми процессами межфазного взаимодействия и должна быть неотрицательной, причем X может обратиться в нуль, если ПС находится в покое, температуры всех фаз одинаковы и фазовые давления связаны соотношениями $p^\alpha - p^\beta - p_c^{\alpha\beta} = 0$.

Основная задача состоит теперь в том, чтобы на основе физических представлений найти такие соотношения между термодинамическими силами и потоками, при которых выполнялось бы условие $X \geq 0$ для всех движений ПС. Естественно предположить, что термодинамические силы однозначно определяются термодинамическими потоками. Тогда, как известно, можно ввести диссипативную функцию $\chi = \chi(x, r, q, y, \mathbf{e}(\mathbf{v}))$. В этом случае на основе принципа Циглера можно выразить термодинамические силы через потоки. Для выпуклых диссипативных функций эти соотношения имеют вид

$$Z^l = \lambda \partial \chi / \partial z_l, \quad Z^l \in (X^\alpha, Y^{\alpha\beta}, R^{\alpha\beta}, Q^{\alpha\beta}, \tau^\alpha), \quad z_l \in (x_\alpha, y_{\alpha\beta}, r_{\alpha\beta}, q_{\alpha\beta}, \mathbf{e}(\mathbf{v}^\alpha)) \quad (8.2)$$

Здесь Z^l – общий член последовательности обобщенных потоков, указанных в первых скобках, z_l – общий член последовательности обобщенных потоков, указанных во вторых скобках; $l = 1, \dots, N, N$ – число членов в этих последовательностях

$$\lambda = \chi \left(\sum_{\alpha=0}^n X^\alpha x_\alpha + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=0}^n R^{\alpha\beta} r_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha,\beta=0}^n Q^{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha,\beta=1}^n Y^{\alpha\beta} y_{\alpha\beta} + \langle \tau : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \rangle \right)^{-1} \quad (8.3)$$

При суммировании по двум индексам считается, что $\alpha \neq \beta$.

Как известно [14], силы трения в жидкостях могут зависеть линейным и нелинейным образом от тензора скоростей деформации. В правую часть равенства (6.4) входят два слагаемых, обусловленных силами вязкого трения в жидкостях: величина \mathcal{X}_R , зависящая от разности фазовых скоростей и связанная с диссипацией механической энергии за счет взаимодействия между разными фазами на границе, и величина \mathcal{X}_τ , зависящая от тензоров скоростей деформаций каждой фазы и обусловленная тем, что ПС не находится в состоянии равновесия.

Далее рассмотрим соотношения между \mathcal{X}_R и \mathcal{X}_τ , полагая, что диссипативная функция зависит от сил межфазного взаимодействия, тензоров скоростей деформаций, градиентов фазовых температур и т. д. При разных соотношениях между порядками величин \mathcal{X}_R и \mathcal{X}_τ имеются три возможности.

Предположим сначала, что тензоры скоростей деформаций жидких фаз малы, так что $|\mathcal{X}_\tau| \ll |\mathcal{X}_R|$, и величиной \mathcal{X}_τ можно пренебречь, полагая $\mathcal{X}_\tau \equiv 0$. В этом случае для любой жидкой фазы касательные напряжения будут равны нулю, $\boldsymbol{\tau}^a \equiv 0$, а диссипативная функция не будет зависеть от тензоров скоростей деформаций. Для медленных (квазистатических) движений из определяющих соотношений тогда можно получить нелинейные уравнения, которые связывают средние скорости жидких фаз с градиентами фазовых давлений. Если диссипативная функция задана в виде квадратичной формы относительно сил межфазного взаимодействия, то эти уравнения будут линейными, и их можно назвать обобщенным законом Дарси.

Пусть далее величины \mathcal{X}_R и \mathcal{X}_τ – величины порядка единицы. Тогда естественно считать, что диссипативная функция будет квадратичной формой как относительно сил межфазного взаимодействия, так и тензоров скоростей деформаций жидких фаз. В этом случае, как и выше, можно получить обобщенный закон Дарси, а также линейные соотношения между тензорами $\boldsymbol{\tau}^a$ и $\mathbf{e}(\mathbf{v}^a)$.

Если величины \mathcal{X}_R и \mathcal{X}_τ велики, диссипативная функция должна зависеть от всех величин, которые упоминались выше. В этом случае $\boldsymbol{\tau}^a \neq 0$, а определяющие соотношения могут быть как линейными, так и нелинейными.

Далее ограничимся линейными определяющими соотношениями. Тогда диссипативная функция должна быть положительно определенной квадратичной формой относительно переменных $x_{\alpha\beta}, r_{\alpha\beta}, q_{\alpha\beta}, y_{\alpha\beta}, \mathbf{e}(\mathbf{v}^a)$. Для простоты предположим, что вязкие напряжения малы и будем ими пренебре-

гать, полагая $\chi_\tau \equiv 0$. Из положительной определенности диссипативной функции следует, что χ – выпуклая функция, $\chi \geq 0$ и $\chi(0) = 0$; в этом случае $\lambda = 1/2$.

Прежде чем записать явное выражение для диссипативной функции, укажем некоторые свойства диссипативных процессов, которые следуют из физических соображений.

1°. Естественно предположить, что диссипация механической энергии связана главным образом с межфазным взаимодействием на границах фаз и зависит только от термомеханических величин по обе стороны от границы.

2°. Другое предположение связано с равноправием всех жидких фаз – среди них нет ни одной, которую по каким-то признакам можно было бы считать выделенной. Из этого следует, что диссипативная функция не должна зависеть от того, каким образом выбрана нумерация жидких фаз.

3°. Из физических соображений можно прийти к выводу, что величины $X^\alpha, R^{\alpha\beta}, \alpha = 1, \dots, n, \beta = 0, 1, \dots, n$, с одной стороны, и величины $Q^{\alpha\beta}, \alpha, \beta = 0, \dots, n, Y^{\alpha\beta}, \alpha, \beta = 1, \dots, n$ с другой, обусловлены разными физическими процессами. В частности, X^α и $R^{\alpha\beta}$ обусловлены молекулярно-кинетическими закономерностями движений жидкостей, в то время как $Q^{\alpha\beta}$ и $Y^{\alpha\beta}$ – поверхностными явлениями.

Чтобы получить определяющие соотношения, согласующиеся с этими свойствами диссипативных процессов, будем задавать диссипативную функцию в виде

$$\begin{aligned} \chi = \chi^{qR}(x, r) + \chi^{QY}(q, y), \quad \chi^{qR}(x, r) = \sum_{\alpha=0}^n a_\alpha^q x_\alpha^2 + \sum_{\alpha=1}^n a_\alpha^R r_{0\alpha}^2 + \sum_{\alpha, \beta=1}^n a_{\alpha\beta}^R r_{\alpha\beta}^2 + \\ + \sum_{\alpha=1}^n a_\alpha^{qR} r_{0\alpha} (\lambda_0 x_0 - \lambda_\alpha x_\alpha) + \sum_{\alpha, \beta=1}^n a_{\alpha\beta}^{qR} r_{\alpha\beta} (\lambda_\alpha x_\alpha - \lambda_\beta x_\beta), \quad (8.4) \\ \chi^{QY}(q, y) = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^n a_\beta^Q (q_{0\beta}^2 + q_{\beta 0}^2) + \sum_{\alpha, \beta=1}^n \left(\frac{1}{\tau_Q} q_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{\tau_\theta} y_{\alpha\beta}^2 + \frac{2}{\tau} q_{\alpha\beta} y_{\alpha\beta} \right) \end{aligned}$$

Здесь $a_\alpha^q, a_\alpha^R, a_{\alpha\beta}^R, a_\alpha^{qR}, a_{\alpha\beta}^{qR}, a_\alpha^Q, \tau_Q, \tau_\theta, \tau, \lambda_\alpha, \lambda_0$ – постоянные. Коэффициент τ имеет размерность времени и может быть истолкован как время релаксации. Благодаря такому представлению диссипативной функции определяющие соотношения будут удовлетворять принципу симметрии Онзагера (симметрия кинетических коэффициентов).

С учетом формул (8.2)–(8.4) получим определяющие соотношения

$$X^0 = \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial x_0} = a_0^q x_0 + \lambda_0 \sum_{\alpha=1}^n a_\alpha^{qR} r_{0\alpha}, \quad X^\alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial x_\alpha} = a_\alpha^q x_\alpha - \lambda_\alpha a_\alpha^{qR} r_{0\alpha} + \lambda_\alpha \sum_{\beta \neq 1}^n a_{\alpha\beta}^{qR} r_{\alpha\beta},$$

$$R^{0\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial r_{0\alpha}} = a_\alpha^{qR} (\lambda_0 x_0 - \lambda_\alpha x_\alpha) + a_\alpha^R r_{0\alpha}, \quad (8.5)$$

$$R^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial r_{\alpha\beta}} = a_{\alpha\beta}^{qR} (\lambda_\alpha x_\alpha - \lambda_\beta x_\beta) + a_{\alpha\beta}^R r_{\alpha\beta}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad \beta \neq \alpha$$

Выражение для величины $Q^{\alpha\beta}$ можно представить в явном виде

$$Q^{\alpha\beta} = \tau_\alpha^{-1} (1/T^\alpha - 1/T^\beta) + \tau^{-1} (p^\alpha - p^\beta - p_c^{\alpha\beta}), \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n$$

$$Q^{\alpha 0} = a_\alpha^Q (1/T^\alpha - 1/T^0), \quad \alpha = 0, \dots, n$$

Определяющие соотношения, следующие из формулы $Y^{\alpha\beta} = 1/2 \partial \chi / \partial y_{\alpha\beta}$ запишем в исходных переменных

$$m(2nT^c)^{-1} (d\theta_\alpha/dt - d\theta_\beta/dt) = \tau^{-1} (1/T^\alpha - 1/T^\beta) + \tau_0^{-1} (p^\alpha - p^\beta - p_c^{\alpha\beta}) \quad (8.6)$$

$$d\theta_1/dt + d\theta_2/dt + \dots + d\theta_n/dt = 0 \quad (8.7)$$

Система (8.6), (8.7) состоит из $n(n-1)/2$ дифференциальных уравнений (при $\alpha < \beta$). Если $n \geq 3$, то эта система будет переопределенной. Для того чтобы она была совместна, на величины $p_c^{\alpha\beta}$ следует наложить некоторые ограничения: ранг расширенной матрицы коэффициентов при $d\theta_\alpha/dt, \alpha = 1, 2, \dots, n$ должен совпадать с рангом самой матрицы [15]. Если N – ранг матрицы коэффициентов системы, то это условие, как известно, эквивалентно тому, что все миноры $(N+1)$ -го порядка расширенной матрицы должны обращаться в нуль. Нетрудно видеть, что эти миноры можно записать в виде некоторых линейных форм с целыми коэффициентами относительно $p_c^{\alpha\beta}$. Таким образом, правые части в системе (8.6) не могут быть произвольными и должны удовлетворять некоторой системе линейных соотношений с целыми коэффициентами.

К такому выводу можно прийти и не обращаясь к общей теории систем линейных уравнений [15], если учесть следующее простое свойство системы (8.6). Левую часть любого уравнения (8.6) при $\alpha < \beta$ можно представить в виде

$$\dot{\theta}_\alpha - \dot{\theta}_\beta = \left(\dot{\theta}_\alpha - \dot{\theta}_{\alpha+1} \right) - \left(\dot{\theta}_{\alpha+1} - \dot{\theta}_{\alpha+2} \right) + \dots + \left(\dot{\theta}_{\beta-1} - \dot{\theta}_\beta \right)$$

Подставляя теперь вместо $(d\theta_\gamma/dt - d\theta_{\gamma+1}/dt), \alpha \leq \gamma < \beta$, правые части соответствующих уравнений, получим, что величина $p_c^{\alpha\beta}$ должна удовлетворять соотношению

$$p_c^{\alpha\beta} = p_c^{\alpha(\alpha+1)} + p_c^{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \dots + p_c^{(\beta-1)\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n, \quad \alpha \neq \beta \quad (8.8)$$

имеющее наглядное физическое истолкование.

Поясним это на примере четырехфазной среды, когда поровое пространство заполнено тремя жидкостями. Возьмем какое-нибудь поперечное сечение произвольного капилляра. Оно разбивается на три области, каждую из которых занимает соответствующая жидкость. Предположим для простоты, что каждая из этих областей односвязна. Обозначим через $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ границы между ними, а через $\Delta p_{\alpha}, \alpha = 1, 2, 3$ скачки давлений на этих границах соответственно. Предположим, что давление в каждой фазе слабо меняется в пределах занимаемой области. В этом случае, очевидно, будет справедливо приближенное выражение

$$\Delta p_1 + \Delta p_2 + \Delta p_3 \cong 0$$

которое дает основание предположить, что и разности средних фазовых давлений, которые в состоянии равновесия считаются равными $p_c^{\alpha\beta}$, должны удовлетворять аналогичным соотношениям. В результате приходим к соотношениям (8.8).

Итак, будем считать, что условия (8.8) выполнены. Тогда система уравнений (8.6) будет эквивалентна следующей системе $n-1$ линейных уравнений

$$\frac{m}{2nT^c} \left(\dot{\theta}_{\gamma} - \dot{\theta}_{\gamma+1} \right) = \tau^{-1} \left(\frac{1}{T^{\gamma}} - \frac{1}{T^{\gamma+1}} \right) + \tau_{\theta}^{-1} \left(p^{\gamma} - p^{\gamma+1} - p_c^{\gamma(\gamma+1)} \right), \quad \gamma = 1, \dots, n-1 \quad (8.9)$$

Систему (8.7), (8.9) можно разрешить относительно $d\theta_{\alpha}/dt$ и получить систему дифференциальных уравнений в нормальном виде. Рассмотрим пример трехфазной среды, $n=2$. Тогда система сводится к уравнению

$$\frac{m}{2nT^c} \dot{\theta} = \tau^{-1} \left(1/T^1 - 1/T^2 \right) + \tau_{\theta}^{-1} \left(p^1 - p^2 - p_c^{12} \right), \quad \theta = 2\theta_1, \quad \theta_2 = 1 - \theta/2$$

Заметим, что в [2] приводится похожее уравнение. Однако в левой части уравнения в [2] отсутствует множитель типа m/T^c , вследствие чего размерности левой и правой частей не совпадают.

Для четырехфазной среды, $n=3$, система (8.6), (8.7) будет совместна, если выполнено условие, в точности совпадающее со вторым соотношением в (5.4).

В общем случае $(n+1)$ -фазной можно указать достаточные условия, при которых будут выполнены соотношения (8.8). Для этого нужно взять $p_c^{\alpha\beta}$ в виде

$$p_c^{\alpha\beta} = g^{\alpha} - g^{\beta}, \quad \alpha \neq \beta, \quad g^{\alpha} = g^{\alpha}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n$$

Теперь можно пояснить, почему в квадратичной форме $\chi^{OY}(q, y)$ коэффициенты при потоках $q_{\alpha\beta}, y_{\alpha\beta}$, равные соответственно τ_{ϱ}^{-1} и τ_{θ}^{-1} , считаются одинаковыми и не зависят от индексов α и β . Если отказаться от такого предположения, то установить совместность системы (8.6), (8.7) в общем случае не представляется возможным.

Рассмотрим частный случай, когда $\tau_{\theta} \ll 1$. Тогда из уравнений (8.6) можно получить приближенные выражения

$$p^{\alpha} - p^{\beta} = p_c^{\alpha\beta}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) \quad (8.10)$$

Подставив их в определяющие соотношения (7.14), получим

$$\varepsilon_p = \langle m\beta \rangle \langle \theta p_{\Delta} \rangle_+ I_1 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \gamma=1}^n \frac{m_0^{\alpha} m_0^{\gamma}}{m_0} (\beta^{\alpha} - \beta^{\gamma}) (p_c^{\alpha\gamma} - p_0^{\alpha\gamma}) I_1$$

Для трехфазной среды последнее соотношение принимает вид

$$\varepsilon_p = \langle m\beta \rangle \langle \theta p_{\Delta} \rangle_+ I_1 + m_0^1 m_0^2 (\beta^1 - \beta^2) (p_c^{12}(\theta) - p_c^{12}(\theta_0)) I_1 / m_0 \quad (8.11)$$

Здесь θ_0 – корень уравнения $p_c^{12}(\theta_0) = p_0^1 - p_0^2 = p_0^{12}$. Сравнивая теперь (7.16) и (8.11), можно убедиться, что они совпадают.

Получим теперь обобщенный закон Дарси для ПС, содержащей $n+1$ фаз, в изотермическом случае, полагая $x_0 = x_{\alpha} = 0$, $T^0 = T^{\alpha} = T$. Для этого следует ограничиться квазистатическими движениями ПС и пренебречь инерционными членами в уравнениях сохранения импульса. Тогда из (2.6) получим систему уравнений.

$$-m^{\alpha} \nabla p^{\alpha} + \mathbf{R}^{\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n \quad (8.12)$$

Суммарная сила межфазного взаимодействия \mathbf{R}^{α} , связанная с α -фазой, – фазой, представляется согласно (4.1), (8.5) в следующем виде

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{\alpha} &= \sum_{\beta \in [\alpha]} \mathbf{R}^{\alpha\beta} = a_{\alpha}^R r_{\alpha 0} + \sum_{\beta \in (\alpha)} a_{\alpha\beta}^R r_{\alpha\beta} = \left(a_{\alpha}^R (\mathbf{v}^0 - \mathbf{v}^{\alpha}) + 2 \sum_{\beta \in (\alpha)} a_{\alpha\beta}^R (\mathbf{v}^{\beta} - \mathbf{v}^{\alpha}) \right) / T = \\ &= \left(-a_{\alpha}^R (\mathbf{v}^{\alpha} - \mathbf{v}^0) - 2 \sum_{\beta \in (\alpha)} a_{\alpha\beta}^R (\mathbf{v}^{\alpha} - \mathbf{v}^0) + 2 \sum_{\beta \in (\alpha)} a_{\alpha\beta}^R (\mathbf{v}^{\beta} - \mathbf{v}^{\alpha}) \right) / T \end{aligned}$$

Выражая \mathbf{R}^{α} через $\mathbf{v}^{\beta} - \mathbf{v}^0, \beta = 1, \dots, n$ и подставив результат в (8.12), получим систему линейных уравнений относительно величин $\mathbf{z}^{\beta} = (\mathbf{v}^{\beta} - \mathbf{v}^0) / T$.

Запишем эту систему в матричном виде

$$\mathbf{A} \mathbf{z} = \mathbf{P} \quad (8.13)$$

$\mathbf{A} = \|A_{\alpha\beta}\|$ – симметричная матрица

$$A_{\alpha\alpha} = -a_{\alpha}^R - 2 \sum_{\beta \in (\alpha)} a_{\alpha\beta}^R, \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad A_{\alpha\beta} = 2a_{\alpha\beta}^R, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n, \quad \alpha \neq \beta,$$

$$\mathbf{P} = (m^1 \nabla p^1, \dots, m^n \nabla p^n), \quad \mathbf{z} = (\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^n)$$

Пусть $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ – обратная матрица. Очевидно, что матрица \mathbf{B} – симметрична, $B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}$. Умножив обе части уравнения (8.13) на матрицу \mathbf{B} слева, получим

$$\mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{P}$$

или в координатном виде

$$\mathbf{v}^{\alpha} - \mathbf{v}^0 = B_{\alpha\beta} m^{\beta} \nabla p^{\beta} \quad (8.14)$$

Формула (8.14) – обобщение закона Дарси на случай многофазной ПС с n жидкими фазами.

Рассмотрим частный случай трехфазной среды, $n = 2$. Тогда обобщенный закон Дарси (8.14) записывается в виде

$$\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^0 = (a_2 + b) m^1 \nabla p^1 + b m^2 \nabla p^2, \quad \mathbf{v}^2 - \mathbf{v}^0 = b m^1 \nabla p^1 + (a_1 + b) m^2 \nabla p^2$$

Здесь $a_i = -a_i^R / d$, $i = 1, 2$; $b = 2a_{12}^R / d$; $d = -(a_1 a_2 + b(a_1 + a_2)) / T$.

Приведем также определяющие соотношения в исходных переменных для трехфазной среды. Введем для этого обозначения

$$\tilde{T}^k = T^0 / T^k, \quad T^{12} = 1/T^1 + 1/T^2, \quad \Delta_k = (-1)^k T^k a_{12}^{qR} (\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2) T^{12}, \quad k = 1, 2$$

Тогда справедливы

$$\begin{aligned} m^0 q^0 &= -a_0^q \nabla T^0 - \lambda_0 \sum_{k=1}^2 a_k^{qR} (\mathbf{v}^k - \mathbf{v}^0) \tilde{T}^k, \\ R^{12} &= -R^{21} = a_{12}^{qR} (\lambda_1 x^1 - \lambda_2 x^2) + a_{12}^R (\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}^1) T^{12}, \\ m^i q^i &= -a_i^q \nabla T^i + \lambda_i (a_i^{qR} (\mathbf{v}^i - \mathbf{v}^0) + \Delta_i), \\ R^{0i} &= a_i^{qR} (\lambda_0 x^0 - \lambda_i x^i) + a_i^R (\mathbf{v}^i - \mathbf{v}^0) / T^i, \quad i = 1, 2 \\ Q^{0i} &= a_i^Q (1/T^0 - 1/T^i), \quad Q^{12} = \tau_Q^{-1} (1/T^1 - 1/T^2) + \tau^{-1} (p^1 - p^2 - p_c^{12}), \end{aligned}$$

Рассмотрим двухфазную среду. Определяющие соотношения (8.5) в исходных переменных записываются в виде

$$\begin{aligned} -m^0 q^0 &= a_0^q \nabla T^0 + \lambda_0 a_1^{qR} (\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^0) \tilde{T}^1, \\ -m^1 q^1 &= a_1^q \nabla T^1 - \lambda_1 a_1^{qR} (\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^0), \quad Q^{01} = a_1^Q (1/T^0 - 1/T^1) \end{aligned}$$

Выражение, из которого определяется R^{01} , для двухфазной среды такое же, как и для трехфазной. Если $\lambda_1 \ll \lambda_0$ и $\lambda_1 \ll a_1^R$, то слагаемые,

содержащие λ_1 , можно опустить и получить соотношения

$$-m^1 q^1 = a_1^q \nabla T^1, \quad R^{01} = a_1^{qR} \lambda_0 \nabla T^0 / T^0 + a_1^R (v^1 - v^0) / T^1$$

Аналогичные соотношения были постулированы в [2], на основании принципов Онзагера и Кюри. Эти формулы можно получить также как частный случай из определяющих соотношений для трехфазной среды, если положить

$$p_0^{12} \equiv 0, \quad v^2 = v^1, \quad T^2 = T^2, \quad p^1 = p^2, \quad \lambda_1 = \lambda_2$$

9. Полная система уравнений. Определяющие соотношения (7.14) позволяют выразить все входящие в законы сохранения величины через совокупность следующих переменных

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n), \quad \boldsymbol{\sigma}, p = (p_\Delta^1, \dots, p_\Delta^n), \quad T = (T_\Delta^0, T_\Delta^1, \dots, T_\Delta^n), \quad \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$$

Теперь с помощью соотношений (7.14) получим полную систему уравнений, которым должны удовлетворять переменные $\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}, p, T$. Для этого нужно каждое из соотношений (7.14) продифференцировать по времени. Тогда в правой части полученных соотношений будут стоять линейные формы относительно производных. Производные по времени $d\boldsymbol{\varepsilon}/dt$ и ds/dt в левых частях этих соотношений заменим соответственно правыми частями второго равенства (7.2) и последнего уравнения в (2.6). Производную $d\eta^\alpha/dt$ заменим правой частью следующего соотношения

$$d\eta_\alpha/dt = \nabla \cdot \mathbf{v}_M^\alpha + m_0 d\theta_\alpha/dt, \quad \text{где } v_M^\alpha = \theta_\alpha (m_0^0 \mathbf{v}^0 + m_0 \mathbf{v}^\alpha), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n.$$

Выражение для производной $d\eta^\alpha/dt$ следует из определения величин η^α, ξ^α и уравнения неразрывности, которое с помощью величин ξ записывается в виде (верхний индекс опускаем)

$$m\rho/\rho_0 \frac{d\xi}{dt} = dm/dt + m\nabla \cdot \mathbf{v}$$

Введем обозначения, которые позволят записать каждое уравнение следующей ниже системы (9.1) одинаково для всех фаз. Ниже для индексов, которые используются для нумерации фаз, применяются латинские буквы.

$$\boldsymbol{\Pi} = (\boldsymbol{\Pi}^0, \boldsymbol{\Pi}^1, \dots, \boldsymbol{\Pi}^n), \quad \boldsymbol{\Pi}^0 = \boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\Pi}^l = 0, \quad \mathbf{r} = (r^0, r^1, \dots, r^n),$$

$$r^0 = T^0 \lambda_0 \sum_{k=1}^n a_k^{qR} r_{0k}, \quad r^l = T^l \lambda_l \left(-a_{lk}^{qR} r_{0l} + \sum_{k=1}^n a_{lk}^{qR} r_{lk} \right), \quad \Theta = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33},$$

$$T_M^l = \theta_l (m_0^0 \alpha^0 T_\Delta^0 + m_0 \alpha^l T_\Delta^l), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}^0, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^n), \quad \boldsymbol{\varepsilon}^0 = -\alpha^\sigma, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^l = 0, \quad l = 1, 2, \dots, n,$$

$$b = (b^0, \dots, b^n), \quad b^k = a_k^q, \quad k = 0, \dots, n$$

С помощью этих обозначений систему дифференциальных уравнений относительно величин $\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}, p, T$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} m\rho \partial \mathbf{v} / \partial t &= \nabla \cdot \Pi + m \nabla p_{\Delta} + \mathbf{R}, \\ (1 + \nu) / E (\partial \boldsymbol{\sigma} / \partial t - \nu I_1 \partial \Theta / (1 + \nu) \partial t) + \langle m \beta \partial p_{\Delta} / \partial t \rangle I_1 + c^0 \partial T_{\Delta}^0 / T_0^0 \partial t I_1 &= \mathbf{e}(\nu^o), \\ m \beta \partial \Theta / \partial t + m \gamma \partial p_{\Delta} / \partial t + \partial T_M / \partial t &= \nabla \cdot \mathbf{v}_M + m_0 d\theta / dt, \\ \alpha \partial \Theta / \partial t + m \alpha \partial p_{\Delta} / \partial t + m c \partial T_{\Delta} / T_0 \partial t &= [\nabla \cdot (b \nabla T + r) + Q] / T_0 + \Pi_S \end{aligned} \quad (9.1)$$

К уравнениям (9.1) следует присоединить систему дифференциальных уравнений (8.6), (8.7) относительно величин θ . Заметим, что в общем случае полная система уравнений не расщепляется на две подсистемы.

Заметим, что последнее соотношение в системе (9.1) представляет собой систему дифференциальных уравнений параболического типа относительно температур T^0, T^1, \dots, T^n , причем величина Θ будет входить только в уравнение, соответствующее твердой фазе.

Выше предполагалось, что поведение твердой фазы описывается уравнениями линейной теории упругости. Однако в приложениях, в частности в геомеханике, изучаются среды, поведение которых описывается моделью упрочняющегося упругопластического тела (течение мягких и сыпучих грунтов) [16, 17] либо моделью вязкоупругого тела (дилатансия твердых горных пород) [18]. Ясно, что большая часть изложенных здесь рассуждений может быть перенесена на такие среды. Однако требуется ввести некоторые дополнительные предположения, главное из которых связано с тем, что для неупругих сред нет взаимно однозначного соответствия между тензорами напряжений и деформаций.

Литература

1. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. I . 464 с. Ч. II. 360 с.
2. Николаевский В. Н. Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. 232 с.
3. Leverett M.C. Capillary behavior in porous solids // Trans. AIME. Amer. Inst. Min. Metal. Petrol. Eng. 1941. V. 142. P. 151–169.
4. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
5. Григорян С. С. Об осреднении физических полей // Докл. АН СССР, 1980. Т. 254. № 4. С. 846–850
6. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1953. 627 с.

7. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Гостехиздат, 1957. 552 с.
8. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
9. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 2. С. 184–195.
10. Леонтович М. А. Введение в термодинамику. Статистическая физика. М.: Наука. 1983. 416 с.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М., Наука. 1986, 736 с.
12. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука. 1979, 431 с.
13. Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. V. 2. Partial Differential Equations. N.-Y.; L.: Intersci. 1962. 836 p. = Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
14. Astarita G., Marrucci G. Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics. N.-Y.; L.: McGraw-Hill 1974. 296 p.= Астарита Дж., Маруччи Дж. Основы гидродинамики неньютоновых жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.
15. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 1. М.: Гостехиздат, 1953. 339 с.
16. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
17. Глушко А. И., Нещеретов И. И. Об одном методе приближенного решения квазистатических задач для упрочняющихся тел / ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 1. С. 162–172.
18. Глушко А. И., Нещеретов И. И. О кинетическом подходе к разрушению горных пород // МГТ. 1986, № 6. С. 140–146.

Комментарии

1. Статья «Об одном подходе к построению моделей многофазных упругих пористых сред» опубликована в журнале «Прикладная математика и механика» (ПММ) 2007. Т. 71, № 4. С. 636–669; поступила в редакцию 01.06.2006. Авторы – А. И. Глушко, И. И. Нещеретов.
2. Работа была признана лучшей статьей, опубликованной в 2007 г. в журнале ПММ.

Глава 10. Модель упрочняющихся сред с тензорным параметром повреждаемости

В механике разрушения можно выделить два основных направления. В одном из них, восходящем к Гриффитсу, изучаются процессы зарождения и развития трещин [1]. К другому направлению относится континуальная теория разрушения, в которой рассматриваются такие состояния твердых деформируемых тел, когда число разного рода микродефектов настолько велико, что поля напряжений, деформаций и других физических величин быстро осциллируют. В этом случае используются осредненные поля физических величин, а для описания процесса накопления в среде микродефектов вводится параметр повреждаемости. Параметр повреждаемости включается в число определяющих параметров модели поведения среды.

Одна из основных задач континуальной теории разрушения состоит в том, чтобы установить функциональную зависимость параметра повреждаемости от различных физических величин. Для решения этой задачи могут привлекаться результаты, полученные при изучении разрушения на микроуровне: скорость зарождения и рост микродефектов, взаимодействие и распределение микродефектов.

Во многих случаях, когда число микропор значительно превышает число остальных микродефектов или когда среди микродефектов доминируют микротрещины, а распределение нормалей к поверхностям микротрещин равномерно, в качестве параметра повреждаемости можно ввести скаляр. Однако для материалов, в которых распределение нормалей к поверхностям микротрещин неравномерно, использование в качестве параметра повреждаемости скаляра недостаточно для адекватного описания накопления повреждений. В общем случае в качестве параметра повреждаемости может использоваться тензор некоторого ранга. Примером использования тензора второго рода в качестве указанного параметра является один из вариантов континуальной теории среды с трещинами [2].

В последнее десятилетие значительно вырос интерес к описанию процессов анизотропного разрушения с помощью моделей, учитывающих накопление повреждений и использующих тензорный параметр повреждаемости. Отчасти этот интерес связан с созданием и исследованием поведения новых материалов. Укажем на одну из недавних работ [3], посвященную экспериментальному исследованию разрушения тонких листов из алюминиевых сплавов. Следует упомянуть обзор [4], в котором

рассматриваются некоторые модели разрушения, использующие тензорный параметр повреждаемости.

Основные предпосылки и определения. Рассмотрим упрочняющиеся упругопластические среды, при деформировании которых наблюдается эффект Баушингера и происходит накопление дефектов. Следуя принятому в механике сплошных сред подходу, примем, что состояние каждой материальной точки среды однозначно характеризуется некоторой системой параметров состояния, причем свободная энергия и функция нагружения представляются в виде некоторых функций от этих параметров. Тогда из уравнений первого и второго начала термодинамики и дополнительных предположений, о которых будет сказано ниже, можно вывести систему соотношений между параметрами состояния и обобщенными термодинамическими силами (или потоками), которая, после преобразования, сводится к системе уравнений с частными производными.

К последней следует предъявить следующие требования.

1° Любые статистически значимые опытные данные должны быть удовлетворительно аппроксимированы решениями этой системы.

2° Решения должны удовлетворять неравенствам, вытекающим из второго начала термодинамики при учете необратимости процесса разрушения.

3° Должна быть разрешима задача Коши с начальными данными на любой нехарактеристической поверхности в трехмерном пространстве.

Требование 3° приводит к еще одному условию – условию Адамара – Лежандра (сильной эллиптичности), которое в теориях упругости и вязкоупругости является необходимым условием разрешимости задачи Коши в малом, т.е. на некотором достаточно малом интервале времени. Ясно, что это же условие будет необходимым для разрешимости задачи Коши и для построения локальных моделей разрушения, в которых частные производные параметров модели по координатам не входят в кинетическое уравнение, описывающее изменение повреждаемости. А тогда тип системы дифференциальных уравнений, которая моделирует движения таких сред, и тип системы, которая получается из нее при отбрасывании кинетического уравнения, будут совпадать. Благодаря этому вопрос о разрешимости задачи Коши и соответствующих смешанных задач для системы уравнений, описывающей процесс разрушения, сводится к разрешимости этих задач для нелинейных моделей, не учитывающих разрушение. Следует обратить внимание, что существующие теоремы о представлении функций нескольких тензорных переменных не содержат критериев, обеспечивающих выполнение условия Адамара – Лежандра.

Как известно, в качестве определяющих параметров в механике используются два набора переменных: в один входит тензор напряжений (и тогда нужно исходить из потенциала Гиббса), во второй – тензор упругих деформаций (тогда нужно исходить из свободной энергии). Далее будем использовать оба набора определяющих параметров.

Для дважды дифференцируемых выпуклых функций условие Адамара – Лежандра следует из критерия выпуклости. Ниже принимается, что свободная энергия – функция пяти аргументов, причем три из них – тензоры (тензор упругих деформаций, тензор остаточных напряжений и тензор повреждаемости), а два – скаляры (температура и параметр упрочнения). Поэтому условие Адамара – Лежандра сводится к тому, что функция, аппроксимирующая свободную энергию, должна быть дважды дифференцируемой выпуклой функцией по первому аргументу.

Предлагается один из возможных способов аппроксимации определяющих соотношений, позволяющий проверить справедливость упомянутых условий. Заметим, что эта проверка приводит к нетривиальным математическим выкладкам. Следует обратить внимание, что при изложении большинства известных авторам работы моделей поведения среды такого рода анализ отсутствует. Это, вообще говоря, может привести к тому, что некоторые решения системы уравнений модели будут не согласовываться с исходными физическими предпосылками.

Для простоты изложения будем использовать декартову систему координат $x = (x_1, x_2, x_3)$. Примем следующие обозначения: ρ – плотность среды, T – температура, s – удельная энтропия, \mathcal{F} – удельная свободная энергия, \mathbf{v} – вектор скорости, \mathbf{q} – вектор потока тепла, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор упругих деформаций, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, \mathbf{X} – тензор остаточных напряжений, $\mathbf{e}(\mathbf{v})$ – тензор скоростей деформаций, \mathbf{e}' и \mathbf{e}'' – тензоры скоростей упругих и пластических деформаций, \mathbf{I} – единичный тензор второго ранга. Девиаторы тензоров второго ранга будем обозначать верхним индексом D , например, $\boldsymbol{\sigma}^D$ – девиатор тензора напряжений, операцию транспонирования – верхним индексом T , свертку любых двух тензоров – символом $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. В рассматриваемой системе координат не будем делать различия между матрицей компонент тензора и самим тензором. Первый инвариант тензора второго ранга $\mathbf{a} = (a_{ij})$ будем обозначать через $j(\mathbf{a}) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$, скалярное произведение любых тензоров \mathbf{a} и \mathbf{b} второго ранга обозначим через

$$\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{b} : \mathbf{a} = j(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T) = j(\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b})$$

Если $\mathbf{c} = (c_{ijkl})$ – тензор четвертого ранга, а $\mathbf{b} = (b_{ij})$ – тензор второго ранга, то можно определить тензор второго ранга $\mathbf{cb} = ((cb)_{ij}) = (c_{ijkl}b_{kl})$.

Здесь и ниже по парам повторяющихся индексов подразумевается операция суммирования:

1) если индексы рассматриваются как компоненты тензора, то суммирование от 1 до 3;

2) если индекс означает номер коэффициента и порядковый номер тензора четвертого ранга, то – от 1 до 5;

3) если индекс означает номер коэффициента и показатель степени тензора второго ранга, то – от 0 до 2.

Тензоры четвертого ранга, компоненты которых не изменяются при перестановке первых двух (вторых двух) индексов и при перестановке первой и второй пары индексов, будем называть симметричными, отступая от общепринятого определения. Для таких тензоров справедливо тождество

$$\mathbf{Aa} : \mathbf{b} = \mathbf{a} : \mathbf{Ab}$$

где \mathbf{a} и \mathbf{b} – любые симметричные тензоры второго ранга.

Тензоры четвертого ранга \mathbf{A} , удовлетворяющие условию

$$\mathbf{Ab} : \mathbf{b} > 0 \quad \text{при } \mathbf{b} \neq 0$$

будем называть положительно определенными.

Степени тензора второго ранга \mathbf{h} определяются по формулам

$$\mathbf{h}^0 = \mathbf{I}, \quad \mathbf{h}^k = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h}^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Далее считаем упругие деформации и конвективные члены малыми.

Рассмотрим твердое деформируемое тело, содержащее достаточно большое количество микротрещин. Возьмем «физически бесконечно малый объем», содержащий N микротрещин. Обозначим через $\Delta_k \mathbf{u}$ скачок вектора перемещений на k -й микротрещине, а через \mathbf{n}_k – нормаль к ней. Введем величины

$$\mathbf{D}_k = \mathbf{n}_k \otimes \Delta_k \mathbf{u} + \Delta_k \mathbf{u} \otimes \mathbf{n}_k$$

Величина \mathbf{D}_k не зависит от выбора нормали \mathbf{n}_k , так как

$$\Delta_k \mathbf{u} = \lim_{s \rightarrow 0} (\mathbf{u}(x + s\mathbf{n}_k) - \mathbf{u}(x - s\mathbf{n}_k))$$

Если вместо \mathbf{n}_k взять противоположный вектор, то скачок $\Delta_k \mathbf{u}$ также изменит знак, однако величина \mathbf{D}_k не изменится. Среднее значение

величин \mathbf{D}_k принимается в качестве параметра повреждаемости, т.е.

$$\mathbf{D} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{D}_k$$

Очевидно, что таким образом введенная [2] величина \mathbf{D} – тензор второго ранга.

Процесс накопления в твердом теле разного рода микродефектов (микрорпор, микротрещин), который можно описать с помощью тензора повреждаемости \mathbf{D} , в общем случае – четвертого ранга, в литературе принято называть анизотропным разрушением. Далее ограничимся случаем, когда параметр повреждаемости характеризуется тензором второго ранга $\mathbf{D} = (D_{ij})$.

1. Общие положения термодинамики необратимых процессов.

Накопление повреждений будем характеризовать тензором второго ранга \mathbf{D} , считая его симметричным и положительно определенным. Полагаем, что значение $\mathbf{D} = 0$ ($\mathbf{D} > 0$) соответствует неразрушенному (разрушенному) состоянию среды, а главные значения тензора \mathbf{D} не превышают единицу. Если наибольшее главное значение становится равным единице, то описывать поведение среды в рамках континуальной теории разрушения становится невозможным и необходимо вводить дополнительные предположения, например, считать, что в среде образуются макротрещины, и задавать закон, по которому происходит их развитие. Этот этап процесса разрушения рассматриваться не будет. В общем случае накопление повреждений может характеризоваться не одним, а несколькими параметрами разной физической природы (например, параметрами, обусловленными воздействием на тело механических нагрузок и электромагнитных волн), что приводит к использованию тензоров разных рангов. Этот более сложный случай разрушения также не рассматривается.

Будем считать, что состояние среды в каждой точке однозначно характеризуется системой параметров $\varepsilon, T, \mathbf{X}, \alpha, \mathbf{D}$. Здесь \mathbf{X} – тензор второго ранга, а α – скаляр. Будем представлять поверхность нагружения в виде семейства сфер в шестимерном пространстве тензоров напряжений. Положение центра симметрии сферы будем характеризовать тензором \mathbf{X} , а радиус сфер будем считать функцией скалярного параметра α и, быть может, температуры. Параметры \mathbf{X} и α называют параметрами упрочнения. Далее в соответствии с принятым в теории упругопластических сред предположением будем считать, что тензор \mathbf{e} представим в виде суммы

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}' + \mathbf{e}'' \quad (1.1)$$

Введем два взаимобратных тензора второго ранга

$$\mathbf{h} = \sqrt{(\mathbf{I} - \mathbf{D})}, \quad \mathbf{H} = 1/\sqrt{(\mathbf{I} - \mathbf{D})} \quad (1.2)$$

Учитывая определение тензора \mathbf{D} , из определений (2.2) заключаем, что \mathbf{h} и \mathbf{H} – также симметричные положительно определенные тензоры, причем $\mathbf{h} = \mathbf{I}$ при $\mathbf{D} = 0$. Главные значения \mathbf{h} положительны и не превышают единицу. При описании процесса разрушения будем использовать как тензор \mathbf{D} , так и тензоры \mathbf{h} или \mathbf{H} .

Как показывают физические соображения, для рассматриваемых сред свободная энергия \mathcal{F} убывает при накоплении повреждений, что можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{D}} : \frac{d\mathbf{D}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{h}} : \frac{d\mathbf{h}}{dt} \leq 0; \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{D}) \quad (1.3)$$

Если тензор \mathbf{D} – шаровой (т.е. $\mathbf{D} = m\mathbf{I}$), то неравенство (2.3) сводится к

$$\partial \mathcal{F} / \partial d \cdot dm / dt \leq 0$$

Если m – неубывающая функция времени, то из последнего неравенства следует, что \mathcal{F} – убывающая функция от m . Именно для этого случая была построена модель [5], в которой параметры Ламе (или, что то же самое, величины скоростей продольной и поперечных волн) принимались убывающими функциями от m .

Из уравнения второго начала термодинамики [6]

$$\rho T ds / dt = -T \nabla \cdot (\mathbf{q} / T) + Q$$

и уравнения притока тепла, вытекающего из первого начала термодинамики, следует соотношение

$$Q = -\frac{\nabla T \cdot \mathbf{q}}{T} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}' - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\sigma} \right) : \mathbf{e}' - \rho \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} - s \right) \frac{dT}{dt} - \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{X}} : \frac{d\mathbf{X}}{dt} - \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} - \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{D}} : \frac{d\mathbf{D}}{dt}$$

где Q – скорость производства энтропии (некомпенсированное тепло). При выводе этого соотношения использовано равенство $\mathbf{e}' = d\boldsymbol{\varepsilon} / dt$, справедливое при малых деформациях.

Согласно второму началу термодинамики величина Q в последних соотношениях равна нулю при обратимых процессах и неотрицательна при любых необратимых процессах. В теории упругопластических сред предполагается, что величина Q не зависит от тензора \mathbf{e}' и скорости изменения температуры T .

В этом случае уравнение второго начала термодинамики приводится к виду

$$\rho T \dot{s} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}'' - \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{X}} : \dot{\mathbf{X}} - \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} - \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{D}} : \dot{\mathbf{D}} \quad (1.4)$$

а тензор $\boldsymbol{\sigma}$ и удельная энтропия определяются по формулам

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad s = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \quad (1.5)$$

Чтобы получить определяющие соотношения при другой системе определяющих параметров $\boldsymbol{\sigma}, T, \mathbf{X}, \mathbf{x}, \mathbf{D}$, введем потенциал Гиббса Ψ по формуле

$$\rho \Psi = \rho \mathcal{F} - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

В этом равенстве $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}, T, \mathbf{X}, \mathbf{x}, \mathbf{D})$ – решение системы

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \mathbf{X}, \mathbf{x}, \mathbf{D})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$$

при заданных $\boldsymbol{\sigma}, T, \mathbf{X}, \mathbf{x}, \mathbf{D}$.

Функция $\Psi = \Psi(\boldsymbol{\sigma}, T, \mathbf{X}, \mathbf{x}, \mathbf{D})$ совпадает с точностью до знака с преобразованием Лежандра для свободной энергии. Поэтому справедливы соотношения

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad s = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{h}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{h}}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{D}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{D}} \quad (1.6)$$

Учитывая два последних равенства (2.6), условие диссипации при разрушении (2.3) можно записать как

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{D}} : \frac{d\mathbf{D}}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{h}} : \frac{d\mathbf{h}}{dt} \leq 0 \quad (1.7)$$

Соотношения (2.5) (или (2.6)) позволяют определить тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ (или тензор упругих деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$) и энтропию s , если известно явное представление свободной энергии как функции параметров состояния $\boldsymbol{\varepsilon}, T, \mathbf{X}, \mathbf{x}, \mathbf{D}$ (или представление для потенциала Гиббса как функции параметров состояния $\boldsymbol{\sigma}, T, \mathbf{X}, \mathbf{x}, \mathbf{D}$). В уравнение (2.4) входят величины $d\mathbf{D}/dt, d\mathbf{X}/dt, d\mathbf{x}/dt$, которые пока никак не определены. Поэтому необходимо найти такие представления свободной энергии и величин $d\mathbf{D}/dt, d\mathbf{X}/dt, d\mathbf{x}/dt$, чтобы выполнялись уравнение (2.4) и неравенство $Q \geq 0$.

Сформулированная задача не является математической в строгом смысле этого слова, так как перечисленных условий недостаточно, чтобы найти $\mathcal{F}, d\mathbf{D}/dt, d\mathbf{X}/dt, d\mathbf{x}/dt$ как функции параметров $\boldsymbol{\varepsilon}, T, \mathbf{X}, \mathbf{x}, \mathbf{D}$. С другой стороны, эти функции должны быть такими, чтобы было возможно

аппроксимировать опытные данные с той или иной точностью. Поэтому имеет смысл говорить только об аппроксимации определяющих соотношений с заданной точностью. Далее будем рассматривать задачу построения континуальной модели разрушения материала с тензором повреждаемости именно с этой точки зрения.

2. Аппроксимация свободной энергии (потенциала Гиббса). Рассмотрим теперь движения среды при малых отклонениях температуры $\theta = T - T_0$ от некоторого заданного значения. Чтобы установить, в каком виде должна представляться в этом случае свободная энергия и потенциал Гиббса, нужно принять во внимание два опытных факта. Для конструкционных марок сталей, как правило, скорость изменения энтропии слабо зависит от скорости изменения параметров \mathfrak{a} и \mathbf{X} , а в упругой области связь между тензорами напряжений и упругих деформаций не зависит от \mathfrak{a} и \mathbf{X} . Можно учесть эти факты, если принять, что свободная энергия является дважды дифференцируемой функцией и справедливы следующие соотношения

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial T \partial \mathbf{X}} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \mathbf{X}} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial T \partial \mathfrak{a}} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \mathfrak{a}} = 0$$

В этом случае свободная энергия представляется в виде суммы двух функций

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \mathbf{X}, \mathfrak{a}, \mathbf{h}) = \mathcal{F}_0(\mathbf{X}, \mathfrak{a}, \mathbf{h}) + \mathcal{F}_1(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \mathbf{h})$$

Далее для простоты выкладок рассмотрим случай, когда функция $\mathcal{F}_0(\mathbf{X}, \mathfrak{a}, \mathbf{h})$ не зависит от \mathfrak{a} , так как учет этой зависимости не приводит к принципиальным затруднениям. При малых приращениях $\boldsymbol{\varepsilon}$ и θ свободную энергию можно аппроксимировать многочленом Тейлора второй степени. Тогда справедливо приближенное равенство

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \mathbf{X}, \mathbf{h}) \cong \mathcal{F}_0(\mathbf{X}, \mathbf{h}) + s_0 \theta + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} c_\varepsilon \theta^2 + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\varepsilon} \theta + \frac{1}{2\rho} \mathbf{c} \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.1)$$

$$\text{Здесь } s_0 = s_0(\mathbf{h}) = \frac{\partial \mathcal{F}_1(\boldsymbol{\Sigma})}{\partial T}, \quad \boldsymbol{\sigma}_0 = \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{h}) = \rho \frac{\partial \mathcal{F}_1(\boldsymbol{\Sigma})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad c_\varepsilon = c_\varepsilon(\mathbf{h}) = \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1(\boldsymbol{\Sigma})}{\partial T^2},$$

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{h}) = \rho \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1(\boldsymbol{\Sigma})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial T}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{h}) = \rho \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1(\boldsymbol{\Sigma})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = (\boldsymbol{\varepsilon}, T_0, \mathbf{h}) \Big|_{\boldsymbol{\varepsilon}=0}, \quad (2.2)$$

\mathbf{c} – тензорная функция, равная тензору упругости \mathbf{C} при $\mathbf{h} = \mathbf{I}$.

$$\mathbf{C} = \lambda_0 \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_0 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

где $\lambda_0 > 0, \mu_0 > 0$ – параметры Ламе. Заметим, что коэффициент $c_\varepsilon = c_\varepsilon(\mathbf{h})$

связан с удельной теплоемкостью при постоянных деформациях \tilde{c}_ε соотношением

$$\tilde{c}_\varepsilon = -Tc_\varepsilon$$

Будем считать, что $\sigma_0(\mathbf{h}) = 0$ при $\mathbf{h} = \mathbf{I}$. Учитывая соотношения (3.1), (3.2), условие диссипации (2.3) можно записать в виде

$$\rho \overset{\vee}{\mathcal{F}}_0 + \rho \frac{ds_0}{dt} \theta + \frac{d\sigma_0}{dt} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \frac{dc_\varepsilon}{dt} \theta^2 + \frac{d\beta}{dt} : \boldsymbol{\varepsilon} \theta + \frac{1}{2} \frac{dc}{dt} \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} \leq 0; \quad (2.3)$$

В неравенстве (2.3) $\overset{\vee}{\mathcal{F}}_0 = \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \mathbf{h}} : \frac{d\mathbf{h}}{dt}$.

Так как $\boldsymbol{\varepsilon}$ и θ – независимые переменные, из неравенства (2.3) следуют два неравенства

$$\rho \overset{\vee}{\mathcal{F}}_0 + \rho \frac{ds_0}{dt} \theta + \frac{1}{2} \frac{dc_\varepsilon}{dt} \theta^2 \leq 0, \quad \rho \overset{\vee}{\mathcal{F}}_0 + \frac{d\sigma_0}{dt} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \frac{dc}{dt} \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} \leq 0 \quad (2.4)$$

Учитывая, что $\mathcal{F}_0(\mathbf{X}, \mathbf{h}) = \mathcal{F}(0, T_0, \mathbf{X}, \mathbf{h})$, из условия (2.3) получим, что должно выполняться неравенство

$$\overset{\vee}{\mathcal{F}}_0 \leq 0 \quad (2.5)$$

Поскольку физическая природа тензора \mathbf{h} не принималась во внимание, сделать какие-нибудь суждения о знаках остальных слагаемых в неравенстве (2.2) невозможно. Однако, при учете неравенства (2.5) можно показать, что найдутся $\delta_T(\mathbf{h}) > 0$ и $\delta_\varepsilon(\mathbf{h}) > 0$, такие, что неравенства (2.4), будут выполнены, если $|\theta| \leq \delta_T$, $\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} \leq \delta_\varepsilon^2$.

Введем одно определение. Рассмотрим линейное пространство симметричных тензоров второго ранга и определим бинарную операцию, которая двум любым тензорам \mathbf{a} и \mathbf{b} ставит в соответствие тензор четвертого ранга $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ по формуле

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) \boldsymbol{\tau} = (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}^T \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\tau}^T \cdot \mathbf{a}) / 4$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}$ – любой тензор второго ранга. Можно проверить, что определенный таким образом тензор $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ симметричен:

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})_{ijklm} = (\mathbf{a} \circ \mathbf{b})_{jikm} = (\mathbf{a} \circ \mathbf{b})_{kmij}$$

Компоненты тензора $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ представляются в виде

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})_{ijklm} = (a_{ik} b_{mj} + a_{im} b_{kj} + b_{ik} a_{mj} + b_{im} a_{kj}) / 4$$

Очевидно, что $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \mathbf{b} \circ \mathbf{a}$. Если $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T$, то $(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) \boldsymbol{\tau} = (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a}) / 2$

При $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ тензор $\mathbf{a} \circ \mathbf{a}$ действует по правилу $(\mathbf{a} \circ \mathbf{a})\boldsymbol{\tau} = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a}$, например, $(\mathbf{I} \circ \mathbf{I})\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}$.

Найдем теперь представление для потенциала Гиббса в случае, когда свободная энергия имеет вид (2.1). Учитывая определение потенциала Гиббса и первое соотношение (1.5), после преобразований придем к соотношению

$$\Psi(\boldsymbol{\sigma}, T, \mathbf{X}, \mathbf{h}) = \mathcal{F}_0(\mathbf{X}, \mathbf{h}) + s_0\theta + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\varepsilon}_0 : \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{2\rho}\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\alpha} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0)\theta + \frac{c_\sigma}{2}\theta^2 \quad (2.6)$$

Здесь $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{h}) = (a_{ijkl}(\mathbf{h}))$ – тензор, обратный к тензору $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{h})$, т. е. такой, что выполняется равенство $\mathbf{a} : \mathbf{c} = \mathbf{I} \circ \mathbf{I}$, тензор \mathbf{a} симметричен и положительно определен: $\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} > 0$, $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{a}\boldsymbol{\beta}$ – симметричный тензор второго ранга; $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_0(\mathbf{h}) = \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{h})$, $c_\sigma = c_\varepsilon - \rho^{-1}\boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\beta}$. Заметим, что коэффициент $c_\sigma = c_\sigma(\mathbf{h})$ связан с удельной теплоемкостью при постоянных напряжениях \tilde{c}_σ соотношением $\tilde{c}_\sigma = -Tc_\sigma$.

Будем рассматривать среды, которые в неразрушенном состоянии изотропны, а свободная энергия в этом состоянии имеет вид

$$\mathcal{F}_* = \mathcal{F}_*(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \mathbf{X}, \boldsymbol{\varkappa}) = F_0 \mathbf{X} : \mathbf{X} + s_0\theta + \frac{1}{2}c_\varepsilon\theta^2 + \frac{3}{\rho}\alpha_0 K j(\boldsymbol{\varepsilon})\theta + \frac{\lambda}{2\rho}j^2(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{\mu}{\rho}\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.7)$$

В соотношении (2.7) $F_0 > 0$, $s_0 < 0$, $c_\varepsilon < 0$ – постоянные, α_0 – коэффициент объемного расширения, $K = \lambda_0 + 2/3\mu_0$ – объемный модуль.

Перейдем к вопросу, в каком виде можно задавать функцию \mathcal{F}_0 и тензоры $\boldsymbol{\beta}, \mathbf{c}$, чтобы свободная энергия, определяемая соотношением (2.1), была выпуклой функцией по переменной $\boldsymbol{\varepsilon}$ и диссипация механической энергии при неупругом деформировании и разрушении была положительной. Чтобы ответить на этот вопрос, ниже будет предложен один из способов аппроксимации функции \mathcal{F}_0 и тензоров $\boldsymbol{\beta}, \mathbf{c}$.

Рассмотрим систему тензоров четвертого ранга

$$\mathbf{C}^0 = \mathbf{I} \circ \mathbf{I}, \mathbf{C}^1 = \mathbf{h} \circ \mathbf{h}, \mathbf{C}^2 = \mathbf{I} \circ \mathbf{h}, \mathbf{C}^3 = \mathbf{I} \circ \mathbf{h}^2, \mathbf{C}^4 = \mathbf{h} \circ \mathbf{h}^2, \mathbf{C}^5 = \mathbf{h}^2 \circ \mathbf{h}^2, \mathbf{C}^6 = \mathbf{h} \otimes \mathbf{h}$$

Тензоры $\mathbf{C}^k = \mathbf{C}^k(\mathbf{h})$, $k = 0, 1, \dots, 5$, порождают множество всех тензоров вида $\mathbf{h}^p \circ \mathbf{h}^q$ ($p, q = 1, 2, \dots$). Это следует из тождества Гамильтона – Кэли.

С помощью этой системы введем зависящие от тензора \mathbf{h} квадратичные формы

$$\varphi_0(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{h}) = f(\mathbf{h}) j^2(\boldsymbol{\varepsilon}), f(\mathbf{h}) = f(j_1(\mathbf{h}), j_2(\mathbf{h}), j_3(\mathbf{h})) \geq 0, \quad (2.8)$$

$$f(\mathbf{I}) = 1, \partial f / \partial j_k \geq 0, j_k(\mathbf{h}) = j(\mathbf{h}^k), k = 1, 2, 3$$

$$\varphi_k(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{h}) = \mathbf{C}^k(\mathbf{h}) \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} / 2, \quad k = 1, 2, \dots, 6 \quad (2.9)$$

Из определения форм $\varphi_k = \varphi_k(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{h})$ следует, что при $\mathbf{h} = \mathbf{I}$ будут справедливы равенства

$$\varphi_0(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{I}) = j^2(\boldsymbol{\varepsilon}), \varphi_k(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{I}) = \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad k = 1, 2, \dots, 6 \quad (2.10)$$

Формы $\varphi_k, k = 0, \dots, 5$, положительно определены как функции первого аргумента. Для формы φ_0 это очевидное следствие определения (2.8). Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения при $k = 1, \dots, 5$, требуется следующий факт.

Лемма 1. Для любого симметричного тензора второго ранга \mathbf{z} квадратичная форма

$$\Phi(\mathbf{z}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = j(\mathbf{a} \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{z}) \quad (2.11)$$

относительно \mathbf{z} положительно определена

$$\Phi(\mathbf{z}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) > 0, \quad \mathbf{z} \neq 0$$

где \mathbf{a}, \mathbf{b} – симметричные положительно определенные матрицы.

Доказательство.

В самом деле, существуют единственные симметричные положительно определенные матрицы \mathbf{a}' и \mathbf{b}' , такие, что выполняются равенства

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}' = \mathbf{a}, \quad \mathbf{b}' \cdot \mathbf{b}' = \mathbf{b}$$

Поэтому правую часть выражения (2.11) можно преобразовать следующим образом

$$j(\mathbf{a} \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{z}) = j(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}' \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{b}' \cdot \mathbf{b}' \cdot \mathbf{z}) = j(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{b}' \cdot \mathbf{b}' \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{a}') = j(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{b}' \cdot (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{b}')^T) > 0$$

Вернемся к доказательству положительной определенности форм φ_k . Любую из них, учитывая соотношение (2.9), можно записать в виде

$$\varphi_k(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{h}) = (\mathbf{h}^m \circ \mathbf{h}^n) \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} = j(\mathbf{h}^m \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{h}^n \cdot \boldsymbol{\varepsilon}), \quad m, n = 0, 1, 2$$

Так как $\mathbf{h}^k > 0, k = 0, 1, 2$, то из леммы 1 следует, что правая часть последнего соотношения положительна при $\boldsymbol{\varepsilon} \neq 0$. Это и означает, что формы φ_k положительно определены и, следовательно, выпуклы по переменной $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Покажем, что квадратичные формы φ_k удовлетворяют условию

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{D}} \leq 0, \quad k = 0, 1, \dots, 5 \quad (2.12)$$

С этой целью докажем следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть \mathbf{a}, \mathbf{b} – симметричные положительно определенные матрицы, причем $\mathbf{a} > 0$. Если справедливо неравенство $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} > 0$, то и $\mathbf{b} > 0$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$. Не теряя общности, можно считать, что \mathbf{b} – диагональная матрица, $\mathbf{b} = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Тогда элементы матрицы \mathbf{c} имеют вид

$$c_{kj} = (b_k + b_j) a_{kj}$$

Из условия $\mathbf{c} > 0$ следует, что $c_{kk} > 0, k = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$b_k = \frac{c_{kk}}{2a_{kk}} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Учитывая критерий положительной определенности симметричных матриц, приходим к выводу, что $\mathbf{b} > 0$.

Проверим неравенство (2.12) для форм φ_0 и φ_4 . Проверка для остальных форм выполняется аналогично. В самом деле, учитывая соотношение для вариации $\delta \mathbf{D}$, которое следует из определения (1.2),

$$\delta \mathbf{D} = -(\mathbf{h} \cdot \delta \mathbf{h} + \delta \mathbf{h} \cdot \mathbf{h}) = -(\mathbf{I} \circ \mathbf{h}) \cdot \delta \mathbf{h} = -\delta(\mathbf{h}^2)$$

вариацию формы φ_4 можно записать в виде

$$\delta \varphi_4(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{h}) = \mathbf{C}^4(\mathbf{h} + \delta \mathbf{h}) \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{C}^4(\mathbf{h}) \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2) : \delta \mathbf{D}$$

Здесь $\mathbf{Y}_2 = -\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$, а тензор \mathbf{Y}_1 связан с тензором $\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{h}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ соотношением

$$(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{h}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) : \delta \mathbf{h} = \mathbf{Y}_1 : \delta \mathbf{D}$$

Из последнего соотношения, учитывая определение тензора $\mathbf{I} \circ \mathbf{h}$, выводим равенство

$$-\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{h}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_1 \cdot \mathbf{h}$$

Так как $\mathbf{h} \geq 0$ и левая часть последнего равенства – отрицательно определенный тензор, из леммы 2 следует, что $\mathbf{Y}_1 \leq 0$. Поэтому, учитывая, что $\mathbf{Y}_2 \leq 0$, получим

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial \mathbf{D}} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 \leq 0$$

Чтобы доказать неравенство (2.12) при $k = 0$, достаточно проверить, что справедливо соотношение

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{D}} \leq 0, \text{ если } \frac{\partial f}{\partial j_k} \geq 0, k = 1, 2, 3$$

В самом деле, приращение функции f можно записать в виде

$$\delta f = f(\mathbf{h} + \delta \mathbf{h}) - f(\mathbf{h}) = f(\mathbf{D} + \delta \mathbf{D}) - f(\mathbf{D}) = \left(\frac{\partial f}{\partial j_1} \mathbf{Y}_1 - \frac{\partial f}{\partial j_2} \mathbf{I} + \frac{\partial f}{\partial j_3} (\mathbf{Y}_2 - \mathbf{h}) \right) : \delta \mathbf{D}$$

\mathbf{Y}_1 и \mathbf{Y}_2 определяются из равенств

$$-\mathbf{I} = \mathbf{Y}_1 \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{Y}_1, \quad -\mathbf{h}^2 = \mathbf{Y}_2 \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{Y}_2$$

Так как $\mathbf{h} \geq 0$ и в левые части двух последних равенств представляют собой отрицательно определенные тензоры, из леммы 2 следует, что $\mathbf{Y}_1 \leq 0, \mathbf{Y}_2 \leq 0$. Поэтому справедливо неравенство

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{D}} = \frac{\partial f}{\partial j_1} \mathbf{Y}_1 - \frac{\partial f}{\partial j_2} \mathbf{I} + \frac{\partial f}{\partial j_3} (\mathbf{Y}_2 - \mathbf{h}) \leq 0$$

откуда следует неравенство (2.12) при $k = 0$.

Покажем теперь, что величина $\partial \varphi_6 / \partial \mathbf{D}$ не является знакоопределенным тензором второго ранга. Доказательство этого утверждения проводим от противного. Допустим например, что $\partial \varphi_6 / \partial \mathbf{D} \leq 0$. Тогда из леммы 1, полагая $\mathbf{z} = \mathbf{I}$, получаем неравенство

$$\frac{\partial \varphi_6}{\partial \mathbf{D}} : \dot{\mathbf{D}} \leq 0$$

С другой стороны, из определения формы φ_6 имеем

$$\frac{\partial \varphi_6}{\partial \mathbf{D}} : \frac{d\mathbf{D}}{dt} = \frac{\partial \varphi_6}{\partial \mathbf{h}} : \frac{d\mathbf{h}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{h}}{dt} \otimes \mathbf{h} + \mathbf{h} \otimes \frac{d\mathbf{h}}{dt} \right) \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{h} : \boldsymbol{\varepsilon}) \left(\frac{d\mathbf{h}}{dt} : \boldsymbol{\varepsilon} \right)$$

Правая часть последнего соотношения может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Действительно, возьмем тензор $\boldsymbol{\varepsilon}$ в виде $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ и выберем $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ такими, чтобы выполнялись неравенства

$$\varepsilon_k h_{kk} \geq 0, \quad \varepsilon_k \frac{dh_{kk}}{dt} \leq 0$$

Тогда справедливо неравенство

$$(\mathbf{h} : \boldsymbol{\varepsilon}) \left(\frac{d\mathbf{h}}{dt} : \boldsymbol{\varepsilon} \right) = (\varepsilon_m h_{mm}) \left(\varepsilon_n \frac{dh_{nn}}{dt} \right) \leq 0$$

С другой стороны, когда тензор $\boldsymbol{\varepsilon}$ положительно определен, то с учетом неравенств $\mathbf{h} > 0, d\mathbf{h}/dt < 0$, имеем согласно лемме 1, полагая $\mathbf{z} = \mathbf{I}$

$$(\mathbf{h} : \boldsymbol{\varepsilon}) \left(\frac{d\mathbf{h}}{dt} : \boldsymbol{\varepsilon} \right) \geq 0$$

Тем самым доказано, что неравенство $\partial\varphi_6/\partial\mathbf{D} \leq 0$ несправедливо. Аналогично доказывается, что неравенство $\partial\varphi_6/\partial\mathbf{D} \geq 0$ также несправедливо.

Таким образом, величина $\partial\varphi_6/\partial\mathbf{D}$ не является знакоопределенной, что не позволяет использовать форму φ_6 в предлагаемом здесь подходе к аппроксимации определяющих соотношений.

Свойства (2.10), (2.12) квадратичных форм (2.8), (2.9), а также представление (2.7) свободной энергии, соответствующее неразрушенному состоянию среды, дают основание считать, что функцию \mathcal{F} можно аппроксимировать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \mathbf{X}, \mathbf{h}) = & F_0 \mathbf{dX} : \mathbf{X} + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} + s_0 \theta + \\ & + \frac{1}{2} c_\varepsilon \theta^2 + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\varepsilon} \theta + \frac{\lambda}{2\rho} \mathbf{g}\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\mu}{\rho} j^2(\boldsymbol{\varepsilon}) f \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}(\mathbf{h}) = r_k \mathbf{C}^k, \mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{h}) = s_k \mathbf{C}^k, \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{h}) = 3\alpha_0 K \beta_k \mathbf{h}^k, r_k = r_k(\mathbf{h}) \geq 0, \frac{\partial r_k}{\partial \mathbf{D}} \leq 0,$$

$s_k = s_k(\mathbf{h}) \geq 0, \frac{\partial s_k}{\partial \mathbf{D}} \leq 0, \sum r_k(\mathbf{I}) = \sum s_k(\mathbf{I}) = \sum \beta_k(\mathbf{I}) = 1$, функция f определена соотношениями (2.8).

Заметим, что правая часть соотношения (2.13) может быть получена из соотношения (2.7), если в правой части последнего сделать замену переменных

$$\mathbf{X} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{dX} : \mathbf{X}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \mathbf{g}\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad j^2(\boldsymbol{\varepsilon}) \rightarrow j^2(\boldsymbol{\varepsilon}) f \quad (2.14)$$

Сравнивая соотношения (2.1) и (2.13), получим явное выражение для тензора \mathbf{c}

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{g} + 2\mu f \mathbf{I} \circ \mathbf{I}$$

Докажем некоторые свойства функции \mathcal{F} :

- 1) выпуклость по переменной $\boldsymbol{\varepsilon}$;
- 2) $\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \mathbf{X}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{I}) = \mathcal{F}_*(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \mathbf{X}, \boldsymbol{\varepsilon})$;

3) справедливо неравенство

$$\mathbf{Y} \triangleq \partial \mathcal{F} / \partial \mathbf{D} \leq 0 \quad (2.15)$$

Свойство 1 следует из определения тензора \mathbf{g} и выпуклости форм $\varphi_k, k = 0, 1, \dots, 5$. Свойство 2 следует из определений тензоров \mathbf{d}, \mathbf{g} и функции \mathcal{F} .

Чтобы упростить выкладки, докажем неравенство (2.15) для изотермических процессов. Заметим, что квадратичные формы $\mathbf{dX} : \mathbf{X}, \mathbf{g}\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}$ – это линейные комбинации с положительными коэффициентами квадратичных форм (2.9), для которых справедливо неравенство (2.12). Отсюда, учитывая соотношение (2.8) и ограничения на коэффициенты r_k и s_k , можно получить неравенства $\partial(\mathbf{dX} : \mathbf{X}) / \partial \mathbf{D} \leq 0, \partial(\mathbf{g}\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}) / \partial \mathbf{D} \leq 0, \partial f / \partial \mathbf{D} \leq 0$, из которых следует неравенство (2.15).

Аналогично можно доказать неравенство (2.15) для неизотермических процессов при малых приращениях θ . Для этого следует в выражении для производной $\partial \mathcal{F} / \partial \mathbf{D}$ учесть величины

$$\frac{\partial s_0}{\partial \mathbf{D}} \theta, \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{D}^2} \theta^2, \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{D}} : \boldsymbol{\varepsilon} \theta$$

вклад которых можно сделать сколь угодно малым при соответствующем выборе приращения θ . Неравенство (2.15) будет играть ключевую роль при аппроксимации закона изменения тензора повреждаемости. В соотношение (2.13) входят величины $\boldsymbol{\sigma}_0, s_0, c_\varepsilon, r_k, s_k, k = 0, \dots, 5, \beta_m, m = 0, 1, 2$. Здесь они считаются известными. Задача определения этих величин приводит к решению соответствующих обратных задач. (Обратные задачи, как правило, оказываются некорректными, для их решения разработаны специальные методы.) Однако обратные задачи могут быть поставлены, только когда будет выведена полная система дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять определяющие параметры.

Если требуется аппроксимировать определяющие соотношения не только в окрестности $T = T_0, \boldsymbol{\varepsilon} = 0$, но и в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^6$ в пространстве напряжений, то можно поступить следующим образом. Разобьем область Ω на конечное число подобластей $\Omega_k, \Omega = \bigcup \Omega_k, k = 1, 2, \dots, N$. Будем считать, что Ω_1 – окрестность разгруженного состояния, где аппроксимация функции \mathcal{F} дается формулой (2.13). Выберем в каждой из подобластей Ω_k некоторое значение $\boldsymbol{\sigma}_k \in \Omega_k$ тензора напряжений. Обозначим через $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ соответствующее ему значение тензора упругих деформаций и будем считать, что в пределах каждой подобласти приращение

$\Delta_k \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_k$ мало. Зафиксируем значения переменных $\mathbf{X}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}$. Затем в каждой из подобластей $\Omega_2, \dots, \Omega_N$ аппроксимируем свободную энергию многочленом Тейлора второй степени относительно приращений θ и $\Delta_k \boldsymbol{\varepsilon}$ аналогично соотношению (2.1). После этого повторим все рассуждения, начиная с высказывания относительно соотношения (2.7). Тогда придем к аппроксимации свободной энергии в области Ω .

Можно построить аппроксимацию потенциала Гиббса, соответствующего разрушенному состоянию среды, если выразить величины $\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}$ и c_σ через уже известные величины $\mathbf{c}, \boldsymbol{\beta}$ и c_ε . Рассмотрим вопрос, в каком виде следует задавать тензор \mathbf{a} , если о тензоре \mathbf{c} ничего не известно.

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно задаться представлением потенциала Гиббса, соответствующим неразрушенному состоянию среды. Можно исходить из выражения

$$\rho \tilde{\Psi} = \rho F_0 \mathbf{X} : \mathbf{X} + \rho s_0 \theta + \frac{\rho}{2} c_\sigma \theta^2 + \alpha_0 j(\boldsymbol{\sigma}) \theta - \frac{1+\nu}{2E} \left(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{1+\nu} j^2(\boldsymbol{\sigma}) \right) \quad (2.16)$$

соответствующего представлению свободной энергии в виде (2.7). В соотношении (2.16) ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга. Выражение в круглых скобках представляет собой разность положительных величин, причем установить, будет ли эта разность положительной, в общем случае невозможно. А тогда нельзя сделать вывод о том, будет ли потенциал Гиббса вогнутой функцией по параметру $\boldsymbol{\sigma}$.

Чтобы преодолеть эту трудность, воспользуемся тождеством

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} \equiv \boldsymbol{\sigma}^D : \boldsymbol{\sigma}^D + j^2(\boldsymbol{\sigma})/3$$

Тогда выражение (2.16) преобразуется в другое, более удобное для анализа представление потенциала Гиббса

$$\rho \tilde{\Psi} = \rho F_0 \mathbf{X} : \mathbf{X} + \rho s_0 \theta + \frac{\rho}{2} c_\sigma \theta^2 + \alpha_0 j(\boldsymbol{\sigma}) \theta - \frac{1+\nu}{2E} \left(\boldsymbol{\sigma}^D : \boldsymbol{\sigma}^D + \frac{1-2\nu}{3(1+\nu)} j^2(\boldsymbol{\sigma}) \right) \quad (2.17)$$

Так как $0 \leq \nu < 1/2$, то оба слагаемых в круглых скобках в соотношении (2.17) положительны. Поэтому можно повторить рассуждения, которые привели к аппроксимации (2.13) для свободной энергии и по аналогии с алгоритмом (2.14) сделать замену переменных в правой части (2.17)

$$\boldsymbol{\sigma}^D : \boldsymbol{\sigma}^D \rightarrow \mathbf{G} \boldsymbol{\sigma}^D : \boldsymbol{\sigma}^D, \quad j^2(\boldsymbol{\sigma}) \rightarrow j^2(\boldsymbol{\sigma}) F(\mathbf{h})$$

где функция F подчиняется тем же соотношениям, что и функция f , которая входит в соотношение (2.8), но с одним исключением $\partial F / \partial j_k \leq 0$.

Тогда получим представление потенциала Гиббса в виде

$$\begin{aligned} \rho\Psi = \rho F_0 \mathbf{dX} : \mathbf{X} + \rho s_0 \theta + \rho c_\sigma \theta^2 / 2 + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \\ + \boldsymbol{\alpha} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0) \theta - (1 + \nu) (\mathbf{G} \boldsymbol{\sigma}^D : \boldsymbol{\sigma}^D + \chi j^2(\boldsymbol{\sigma}) F) / 2E \end{aligned} \quad (2.18)$$

Здесь

$$\chi = (1 - 2\nu) / 3(1 + \nu), \mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{H}) = \tilde{s}_k(\mathbf{H}) \mathbf{C}^k(\mathbf{H}), \tilde{s}_k \geq 0, \frac{\partial \tilde{s}_k}{\partial \mathbf{D}} \geq 0, \sum \tilde{s}_k(\mathbf{I}) = 1,$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{h}) = \alpha_0 \tilde{\beta}_k \mathbf{h}^k, \sum \tilde{\beta}_k(\mathbf{I}) = 1, k = 0, \dots, 5, \tilde{\beta}_k = \tilde{\beta}_k(\mathbf{h}) - \text{заданные функции.}$$

Заметим, что тензорная функция \mathbf{G} явно зависит от тензора \mathbf{H} , а не от тензора \mathbf{h} . Это связано с тем, что если ее аргументом является тензор \mathbf{h} , то это приводит к неравенству $\partial\Psi/\partial\mathbf{D} > 0$, в то время как из соотношений (1.6) и (2.17) следует, что справедливо обратное неравенство.

Сравнивая соотношения (2.6) и (2.18), получим явное выражение для тензора \mathbf{a}

$$\mathbf{a} = (1 + \nu) (\mathbf{G} - 2/3 \mathbf{G} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + (G_0 + \chi F) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) / E, G_0 = \frac{1}{9} \sum_{k=1}^3 G_{kkkk}$$

Отметим некоторые свойства функции Ψ :

- 1) вогнутость по переменной $\boldsymbol{\sigma}$;
- 2) $\Psi(\boldsymbol{\sigma}, T, \mathbf{X}, \mathbf{I}) = \tilde{\Psi}(\boldsymbol{\sigma}, T, \mathbf{X})$;
- 3) $\partial\Psi/\partial\mathbf{D} \leq 0$.

Вогнутость по переменной $\boldsymbol{\sigma}$ следует из выпуклости квадратичных форм $\varphi_k(\boldsymbol{\sigma}^D, \mathbf{H}) = \mathbf{C}^k(\mathbf{H}) \boldsymbol{\sigma}^D : \boldsymbol{\sigma}^D$. Свойство 2 следует из равенств

$$\varphi_k(\boldsymbol{\sigma}^D, \mathbf{I}) = \boldsymbol{\sigma}^D : \boldsymbol{\sigma}^D, k = 1, \dots, 5, F(\mathbf{I}) = 1, \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{I}) = \alpha_0 \mathbf{I}$$

Чтобы показать справедливость свойства 3, для простоты выкладок рассмотрим изотермические процессы. Тогда достаточно проверить справедливость неравенств (2.12). В самом деле, из определений тензоров \mathbf{h} и \mathbf{H} следуют равенства

$$\partial\mathbf{H}/\partial\mathbf{h} = -\mathbf{H} \circ \mathbf{H}, \quad \partial\mathbf{D}/\partial\mathbf{h} = -\mathbf{I} \circ \mathbf{h} \quad (2.19)$$

Поэтому, заменяя в равенстве

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{h}} \left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial\mathbf{H}} \right) = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial\mathbf{h}} \left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial\mathbf{D}} \right)$$

производные $\partial\mathbf{H}/\partial\mathbf{h}$ и $\partial\mathbf{D}/\partial\mathbf{h}$ правыми частями равенств (2.19), получим

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial\varphi_k}{\partial\mathbf{H}} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{h} \cdot \frac{\partial\varphi_k}{\partial\mathbf{D}} + \frac{\partial\varphi_k}{\partial\mathbf{D}} \cdot \mathbf{h}$$

Из определения (2.9), если в нем заменить тензор \mathbf{h} на тензор \mathbf{H} , следуют неравенства $\partial\varphi_k/\partial\mathbf{H} \geq 0, k=1, \dots, 5$. Тогда из леммы 2 следует справедливость свойства 3.

Рассмотрим частный случай аппроксимации (2.18), когда

$$\mathbf{G} = \mathbf{H} \circ \mathbf{H}, \quad F(j_1, j_2, j_3) = \frac{1}{1 + \eta(j_2 - 3)}, \quad 0 < \eta < 1, \quad \frac{\partial F}{\partial j_1} = \frac{\partial F}{\partial j_3} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial j_2} < 0$$

В этом случае потенциал Гиббса представим в виде

$$\begin{aligned} \rho\Psi = & \rho F_0 \mathbf{dX} : \mathbf{X} + \rho s_0 \theta + \rho c_\sigma \theta^2 / 2 + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\alpha} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0) \theta - \\ & -(1 + \nu) \left((\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}^D) : (\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}^D) + \chi^2 (\boldsymbol{\sigma}) / (1 - \eta j(\mathbf{D})) \right) / 2E \end{aligned}$$

Если в этом выражении отбросить первые пять слагаемых, то придем к представлению потенциала Гиббса, которое для изотермического случая с точностью до знака и обозначений было постулировано ранее [3,7].

3. Закон изменения тензора \mathbf{D} . Невозможно определить закон изменения тензора \mathbf{D} a priori. Однако представляется интересным проанализировать возможные представления скорости изменения тензора \mathbf{D} как функции определяющих параметров.

Для упругопластических сред множество допустимых значений тензора напряжений представляет собой зависящее от $\mathbf{X}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{h}$ семейство замкнутых выпуклых множеств $\mathbb{K}_{\mathbf{X}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{h}}$. Как правило, множества $\mathbb{K}_{\mathbf{X}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{h}}$ задаются с помощью неравенств

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{h}) \leq 0 \quad (3.1)$$

Для простоты обозначений зависимость функции нагружения f от температуры в неравенстве (3.1) не указана. Во внутренних точках множества $\mathbb{K}_{\mathbf{X}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{h}}$, где справедливо строгое неравенство $f < 0$, среда ведет себя упруго, т.е. выполняются равенства

$$d\mathbf{X}/dt = d\mathbf{h}/dt = d\boldsymbol{\varepsilon}/dt = \mathbf{e}'' = 0 \quad (3.2)$$

На границе множества $\mathbb{K}_{\mathbf{X}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{h}}$, где справедливо равенство $f = 0$, может происходить пластическое течение, т.е. выполняются неравенства

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} \neq 0, \quad \frac{d\mathbf{h}}{dt} \neq 0, \quad \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} \neq 0, \quad \mathbf{e}'' \neq 0$$

Для построения модели упрочняющейся упругопластической среды нужно выразить величины $d\mathbf{X}/dt, d\mathbf{h}/dt, d\boldsymbol{\varepsilon}/dt, \mathbf{e}''$ через $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\varepsilon}, (\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{K}_{\mathbf{X}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{h}})$ так, чтобы были справедливы неравенство (3.1) и перечисленные выше условия. Сформулированный ранее [8, 9] принцип нормальности используется

для построения моделей упрочняющихся упругопластических сред и включает в себя как частный случай постулат Друкера [6].

Чтобы сформулировать принцип нормальности, введем переменные

$$x_1 = \boldsymbol{\sigma}, x_2 = \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{X}}, x_3 = \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{D}}, x_4 = \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.3)$$

и рассмотрим совокупность величин (x_1, x_2, x_3, x_4) как векторы в линейном пространстве \mathbb{R}^{19} . Перепишем неравенство (3.1) в переменных x_1, x_2, x_3, x_4

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{h}) = \varphi(\mathbf{x}) \leq 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (3.4)$$

Будем считать, что $\varphi(\mathbf{x})$ – выпуклая функция, такая, что $\varphi(\mathbf{0}) \leq 0$. Тогда неравенство (3.4) задает замкнутое выпуклое множество \mathbb{K} в пространстве \mathbb{R}^{19} , содержащее начало координат. Границу множества \mathbb{K} назовем поверхностью нагружения и обозначим $\partial \mathbb{K}$.

При этих предположениях справедлив принцип нормальности:

1) если состояние среды таково, что вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{K} \setminus \partial \mathbb{K}$, то среда ведет себя упруго, т.е. выполняются условия (3.2);

2) если состояние среды таково, что вектор $\mathbf{x} \in \partial \mathbb{K}$, тогда вектор $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ с компонентами

$$p_1 = \mathbf{e}''', p_2 = -\frac{d\mathbf{X}}{dt}, p_3 = -\frac{d\mathbf{D}}{dt}, p_4 = -\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt}$$

должен принадлежать нормальному конусу $N_{\mathbb{K}}(\mathbf{x})$, т.е. должно выполняться вариационное неравенство

$$0 \geq \sum_{j=1}^4 p_j (y_j - x_j), \quad \forall \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{K} \quad (3.5)$$

Операция произведения в первых трех слагаемых неравенства (3.5) представляет собой свертку тензоров второго ранга.

По предположению $\mathbf{y} = \mathbf{0} \in \mathbb{K}$, поэтому из определения вектора \mathbf{p} и соотношений (3.3), (3.5) следует, что диссипация механической энергии положительна. Заметим, что в рассматриваемом случае переменные $\mathbf{X}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}$ равноправны, и пластическое течение и разрушение – проявления единого процесса деформирования. Следовательно, в этом случае условие (2.3) – лишнее.

Если поверхность нагружения гладкая, то справедливо соотношение

$$N_{\mathbb{K}}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{p} : \mathbf{p} = \lambda \nabla \varphi, \lambda > 0\}, \quad \nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} \right)$$

В этом случае из принципа нормальности следуют определяющие соотношения

$$\mathbf{e}'' = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{d\mathbf{X}}{dt} = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{d\mathbf{D}}{dt} = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_4}, \lambda \geq 0, \varphi \leq 0, \lambda \varphi = 0 \quad (3.6)$$

Если в результате замены переменных $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, \mathbf{x}, \mathbf{h}) \rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)$ функция f окажется невыпуклой, то воспользоваться принципом нормальности в сформулированном выше виде нельзя. В этом случае величины \mathbf{e}'' , $d\mathbf{X}/dt$, $d\mathbf{D}/dt$, и $d\mathbf{x}/dt$ нужно определять из дополнительных соображений, которые для величин \mathbf{e}'' , $d\mathbf{X}/dt$ и $d\mathbf{x}/dt$ будут приведены в следующем разделе.

Рассмотрим вопрос о том, как аппроксимировать закон изменения тензора \mathbf{D} , если функция нагружения φ не выпукла. Для простоты ограничимся случаем изотермических процессов. Учитывая неравенство (2.15), для построения непротиворечивой модели сплошной среды достаточно задать закон изменения величины \mathbf{D} в виде

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \mathbf{f}_D(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}, \mathbf{e}'') \quad (3.7)$$

Для того чтобы выполнялось соотношение (1.3), \mathbf{f}_D должна быть симметричной положительно определенной тензорной функцией.

Другое важное свойство функции \mathbf{f}_D – ее однородность. В теории пластичности считается, что функция диссипации должна быть однородной функцией первого порядка по аргументу \mathbf{e}'' . Как уже говорилось, диссипация, обусловленная разрушением, представляется в виде двух сомножителей, один из которых зависит, а другой не зависит от \mathbf{e}'' . Тогда из соотношения (3.7) следует, что тензорная функция \mathbf{f}_D положительно однородна по аргументу \mathbf{e}'' , т.е. должно выполняться соотношение

$$\mathbf{f}_D(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}, \lambda \mathbf{e}'') = \lambda \mathbf{f}_D(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}, \mathbf{e}''), \quad \forall \lambda > 0 \quad (3.8)$$

В этом случае тензор \mathbf{D} можно рассматривать как параметр упрочнения.

Для того чтобы определить в общем виде тензорную функцию \mathbf{f}_D , удовлетворяющую указанным выше условиям, введем тензорную функцию

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})} = \mathbf{P}^T \text{diag}(|a_1|, |a_2|, |a_3|) \mathbf{P}$$

Здесь \mathbf{a} – любой симметричный тензор, a_1, a_2, a_3 – его главные значения, \mathbf{P} – матрица, столбцы которой образованы координатами собственных

векторов матрицы \mathbf{a} . Тензор $|\mathbf{a}|$ положительно определен, а его главные значения $|a|_k$ удовлетворяют равенствам

$$|a|_k = |a_k|$$

Тогда тензорную функцию \mathbf{f}_D можно представить в виде

$$\mathbf{f}_D(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}, \mathbf{e}^n) = p_k(|\mathbf{e}^n|^{1/2} \cdot (-\mathbf{Y})^k \cdot |\mathbf{e}^n|^{1/2}) + q_k \boldsymbol{\sigma}^k \cdot |\mathbf{e}^n| \cdot \boldsymbol{\sigma}^k, \quad k = 0, 1, 2 \quad (3.9)$$

Здесь $q_k = q_k(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) \leq 0$, $p_k = p_k(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) \leq 0$ – известные функции.

Очевидно, что формула (3.9) задает симметричную положительно определенную тензор–функцию, которая удовлетворяет условию (3.8).

Можно сократить число произвольных функций, с помощью которых задается тензор \mathbf{D} , до трех, если считать, что справедливо дополнительное условие: тензор $d\mathbf{D}/dt$ коаксиален тензору $|\mathbf{e}^n|$, а его главные значения $R_k, k = 1, 2, 3$, задаются с помощью трех функций f_k

$$f_k(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}, \lambda \mathbf{e}^n) = \lambda f_k(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}, \mathbf{e}^n), \quad \lambda \geq 0, \quad R_k = f_k(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}, \mathbf{e}^n)$$

Рассмотрим два частных случая.

Случай 1. Пусть все функции f_k совпадают: $f_k = f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}, \mathbf{e}^n) > 0$.

Тогда тензор $d\mathbf{D}/dt$ – шаровой:

$$d\mathbf{D}/dt = f \mathbf{I}$$

Случай 2. Если

$$f_k = q_0 |\mathbf{e}^n|_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad q_0 = q_0(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) \geq 0,$$

то

$$d\mathbf{D}/dt = q_0 |\mathbf{e}^n| \quad (3.10)$$

если в соотношении (3.9) положить $p_0 = p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 0$.

Заметим, что представление тензора $d\mathbf{D}/dt$ в виде (3.10) можно получить также из соотношения (3.9). Соотношение (3.10) с точностью до обозначений совпадает с законом изменения тензора \mathbf{D} , постулированным ранее [7].

Рассмотрим теперь вариант, когда правая часть соотношения (3.7) не зависит от \mathbf{e}^n . Ограничимся анализом изотермических процессов. Напомним, что тензор \mathbf{Y} (он определен в соотношении (2.15)) отрицательно определенный, поэтому можно воспользоваться тензорами \mathbf{Y} и \mathbf{h} для аппроксимации функции \mathbf{f}_D в виде

$$\mathbf{f}_D(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) = \mathbf{qY} + \mathbf{ph}; \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{h}) = q_k \mathbf{h}^k \circ \mathbf{h}^k, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{Y}) = p_k (-\mathbf{Y})^k \circ (-\mathbf{Y})^k \quad (3.11)$$

Здесь $k = 0, 1, 2, \mathbf{p}, \mathbf{q}$ – тензоры четвертого ранга. Из выражения (3.11) следует, что функция \mathbf{f}_D представляется в виде линейной комбинации шести тензоров. Вообще говоря, для аппроксимации функции \mathbf{f}_D можно выбрать другие системы линейно независимых положительно определенных тензоров, отличные от использованной в соотношении (3.11).

Заметим, что при $\mathbf{p}(\mathbf{Y}) = 0$ из соотношения (3.11) следует, что функция диссипации, обусловленной разрушением, является квадратичной формой относительно переменной \mathbf{Y} , что соответствует традиционному представлению этой функции в термодинамике неравновесных процессов.

Как и раньше, можно сократить с шести до трех число функций, с помощью которых задается тензор $d\mathbf{D}/dt$. Для этого нужно дополнительно предположить, что тензоры $d\mathbf{D}/dt$ и \mathbf{Y} коаксиальны, а главные значения тензора $d\mathbf{D}/dt$ задаются с помощью трех функций $f_k(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) \geq 0$ ($k = 1, 2, 3$). Рассмотрим два частных случая:

- 1) если все функции f_k равны, то $d\mathbf{D}/dt$ – шаровой тензор;
- 2) если

$$f_k(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) = f y_k, y_k \geq 0, f \geq 0$$

и $y_k, k = 1, 2, 3$ – главные значения тензора \mathbf{Y} , то

$$d\mathbf{D}/dt = f \mathbf{Y}$$

Последнее соотношение следует также из равенства (3.11), если положить

$$\mathbf{p}(\mathbf{Y}) = 0, q_0 = f, q_1 = q_2 = 0$$

Первый $I_D = j(\mathbf{D})$, второй $II_D = j(\mathbf{D} \cdot \mathbf{D})$ и третий $III_D = \det(\mathbf{D})$ инварианты тензора повреждаемости не убывают в процессе деформирования. Действительно, учитывая неравенство $\mathbf{f}_D \geq 0$, имеем

$$\frac{dI_D}{dt} = j\left(\frac{d\mathbf{D}}{dt}\right) = j(\mathbf{f}_D) \geq 0, \quad \frac{dII_D}{dt} = j\left(\frac{d\mathbf{D}}{dt} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \frac{d\mathbf{D}}{dt}\right) = 2\mathbf{f}_D : \mathbf{D} \geq 0,$$

$$\frac{dIII_D}{dt} = \frac{d(\det(\mathbf{D}))}{dt} = \det(\mathbf{D})\mathbf{f}_D : \mathbf{D}^{-1} \geq 0$$

4. Аппроксимация тензоров \mathbf{e}'' , $d\mathbf{X}/dt$, $d\mathbf{x}/dt$. Будем рассматривать среды, для которых функция нагружения f_* , соответствующая неразрушенному состоянию, представляется в виде

$$f_*(\boldsymbol{\sigma}, T, \mathbf{X}, \mathbf{x}) = (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})^D : (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})^D - \mathcal{K}_*(\mathbf{x}, T) \quad (4.1)$$

а пластические деформации удовлетворяют условию несжимаемости

$$j(\mathbf{e}^n) = 0$$

В соотношении (4.1) \mathcal{K}_* – произвольная неубывающая непрерывная функция. Тогда, учитывая сделанные предположения и следуя подходу, предложенному для аппроксимации свободной энергии, придем к аппроксимации функции нагружения при описании разрушенного состояния среды в виде

$$f(\boldsymbol{\sigma}, T, \mathbf{X}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{h}) = \frac{1}{2} \mathbf{b}(\mathbf{h}) (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})^D : (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})^D - \mathcal{K}(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \mathbf{h}) \quad (4.2)$$

Здесь

$$\mathbf{b}(\mathbf{h}) = q_k \mathbf{C}^k(\mathbf{h}), \quad q_k = q_k(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}) \geq 0, \quad \sum_k q_k(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}) = 1$$

\mathcal{K} – произвольная непрерывная неубывающая функция по первому аргументу. Очевидно, что определенная таким образом функция нагружения выпукла по совокупности переменных $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}$.

Для того чтобы записать определяющие соотношения для тензоров \mathbf{e}^n и $d\mathbf{X}/dt$, введем переменную

$$\boldsymbol{\eta} = \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{X}} = \rho F_0 \mathbf{dX}$$

и перепишем соотношение (4.2) в переменных $\boldsymbol{\sigma}, T, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{h}$

$$\varphi(\boldsymbol{\sigma}, T, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{h}) = \frac{1}{2} \mathbf{b}(\mathbf{h}) \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{\rho F_0} \mathbf{d}^{-1} \boldsymbol{\eta} \right)^D : \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{\rho F_0} \mathbf{d}^{-1} \boldsymbol{\eta} \right)^D - \mathcal{K}(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \mathbf{h}) \quad (4.3)$$

Так как \mathbf{d} – положительно определенный тензор четвертого ранга, то существует обратный тензор \mathbf{d}^{-1} . Далее функцию \mathcal{K} для простоты будем считать не зависящей от тензора \mathbf{h} , так как учет этой зависимости не приводит к принципиальным трудностям. Поэтому $\mathcal{K}_* = \mathcal{K}$.

Будем рассматривать множество всех пар $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta})$ как линейное пространство \mathbb{R}^{12} . В пространстве \mathbb{R}^{12} выделим зависящее от $\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{h}, T$ множество $\mathcal{K}_{\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{h} T}$ тех пар $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta})$, которые удовлетворяют неравенству

$$\varphi(\boldsymbol{\sigma}, T, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{h}) \leq 0$$

Так как функция φ выпукла по переменным $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta})$, то множество $\mathcal{K}_{\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{h} T}$ также выпукло в \mathbb{R}^{12} . Поэтому по аналогии с принципом нормальности

полагаем, что для внутренних точек $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{K}_{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{h}T}$ справедливы равенства

$$\mathbf{e}'' = d\mathbf{X}/dt = 0$$

Если пара $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta})$ принадлежит границе множества $\mathbb{K}_{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{h}T}$, то полагаем, что величина $(\mathbf{e}'', -d\mathbf{X}/dt)$ принадлежит нормальному конусу $N_K(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta})$ к множеству $\mathbb{K}_{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{h}T}$. Если множество $\mathbb{K}_{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{h}T}$ имеет гладкую границу, то сформулированные выше условия эквивалентны следующим:

если $\varphi < 0$, то

$$\mathbf{e}'' = d\mathbf{X}/dt = 0,$$

если $\varphi = 0$, то

$$\mathbf{e}'' = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad -\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\eta}}, \quad \lambda \geq 0, \quad \text{при } \overset{\nabla}{f} > 0 \quad (4.4)$$

либо

$$\mathbf{e}'' = d\mathbf{X}/dt = 0, \quad \text{при } \overset{\nabla}{f} \leq 0 \quad (4.5)$$

Здесь

$$\overset{\nabla}{f} = f_{\boldsymbol{\sigma}} : \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} + f_T \frac{dT}{dt} + \mathcal{F}_h : \frac{d\mathbf{h}}{dt}; \quad f_{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad f_T = \frac{\partial f}{\partial T}, \quad f_h = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}} \quad (4.6)$$

причем $\zeta = 1$ для сред, у которых тензор $d\mathbf{D}/dt$ не зависит от \mathbf{e}'' , и $\zeta = 0$ для сред, у которых тензор $d\mathbf{D}/dt$ зависит от \mathbf{e}'' .

Вычислим $\partial \varphi / \partial \boldsymbol{\sigma}$ и $\partial \varphi / \partial \boldsymbol{\eta}$, учитывая соотношение (4.3). Получим

$$\mathbf{e}'' = \lambda \left(\mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})^D \right)^D, \quad \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{\lambda}{\rho F_0} \mathbf{d}^{-1} \left(\mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})^D \right)^D \quad (4.7)$$

Согласно первому из этих равенств условие пластической несжимаемости выполнено. Кроме того, из равенств (4.7) следует соотношение

$$d\mathbf{X}/dt = \mathbf{d}^{-1} \mathbf{e}'' / (\rho F_0) \quad (4.8)$$

которое при $\mathbf{h} = \mathbf{I}$ принимает вид

$$d\mathbf{X}/dt = \mathbf{e}'' / (\rho F_0)$$

и с точностью до обозначений совпадает с законом изменения тензора \mathbf{X} , предложенного Прагером [10].

Из соотношений (4.4) и (4.5) следует неравенство

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}'' - \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{X}} : \frac{d\mathbf{X}}{dt} \geq 0 \quad (4.9)$$

В самом деле, учитывая соотношения (4.4) и (4.8), левую часть неравенства (4.9) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}'' - \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{X}} : \frac{d\mathbf{X}}{dt} &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}'' - \mathbf{d}\mathbf{X} : \mathbf{d}^{-1}\mathbf{e}'' = \\ &= \lambda(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) : (\mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})^D)^D = \lambda(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})^D : \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})^D \geq 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Скалярный параметр упрочнения \varkappa обычно задается с помощью соотношения

$$\frac{d\varkappa}{dt} = \chi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}'') \quad (4.11)$$

Здесь χ – неотрицательная непрерывная функция, однородная первого порядка по второму аргументу. Так как $\partial \mathcal{K} / \partial \varkappa > 0$, то справедливо неравенство

$$\frac{d\varkappa}{dt} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \varkappa} \geq 0 \quad (4.12)$$

Параметр λ в соотношениях (4.4) можно представить в явном виде. Для этого нужно продифференцировать по времени правую часть равенства (4.2) и использовать выражения (4.4), (4.5) и (4.11). Тогда получим

$$\lambda = \frac{\overset{\vee}{f}}{\Delta}, \quad \Delta = \chi \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \varkappa} + \frac{1}{\rho F_0} \mathbf{d}^{-1} f_{\sigma} : f_{\sigma} - (1 - \varsigma) f_h : \mathbf{h} \quad (4.13)$$

Функция $\overset{\vee}{f}$ определена формулой (4.6).

Заметим, что величина Δ строго положительна. Это следует из соотношения (4.12), положительной определенности тензора \mathbf{d} и определения тензоров $d\mathbf{D}/dt$ и $d\mathbf{h}/dt$, а также из представления функции нагружения.

Для аппроксимации функции нагружения при описании разрушенного состояния среды было принято соотношение [7]

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, \mathbf{H}) = (\mathbf{Z} - \mathbf{X}) : (\mathbf{Z} - \mathbf{X}) - r; \quad \mathbf{Z} = (\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}^D \cdot \mathbf{H})^D$$

где r – параметр упрочнения. Тогда получим

$$\Delta = \chi \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \varkappa} + \frac{1}{\rho F_0} f_{\sigma} : \mathbf{d}^{-1} f_{\sigma} - 2 \left[(\mathbf{Z} - \mathbf{X})^D \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}^D + \boldsymbol{\sigma}^D \cdot \mathbf{H} \cdot (\mathbf{Z} - \mathbf{X})^D \right] : \frac{d\mathbf{H}}{dt} \quad (4.14)$$

Последнее слагаемое в (4.14) может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому неясно, будет ли правая часть соотношения (4.14) всегда положительной, или на некотором множестве значений параметров состояния она обращается в нуль.

Можно было бы, следуя предлагавшемуся ранее подходу [7, 11], добавить в правую часть соотношения (4.8) слагаемое вида $-\omega \mathbf{B}\mathbf{X}$, где $\omega = \omega(T)$ – некоторая функция, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{h})$ – симметричный тензор четвертого ранга. В этом случае для параметра λ справедливо представление

$$\lambda = \frac{f}{\Delta}, \quad \tilde{\Delta} = \Delta + \omega \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} : \mathbf{B}\mathbf{X}$$

Второе слагаемое в последнем соотношении может принимать как положительные, так и отрицательные значения, какие бы ни были функция ω и тензор \mathbf{B} . Доказать, что правая часть этого соотношения будет заведомо положительна, невозможно без дополнительных предположений.

В разд. 3 и 4 получены следующие результаты.

Для сред, у которых функция нагружения выпукла по совокупности всех переменных, определяющие соотношения (3.6) следуют из принципа нормальности и удовлетворяют условию $Q \geq 0$. В этом случае на свободную энергию (потенциал Гиббса) не нужно накладывать никаких дополнительных условий.

Для сред, у которых функция нагружения выпукла только по совокупности переменных $\boldsymbol{\sigma}^D, \mathbf{X}$, соотношение (3.9) при условии $\partial \mathbf{f}_D / \partial \mathbf{e}'' \neq 0$ или соотношение (3.11) при условии $\partial \mathbf{f}_D / \partial \mathbf{e}'' = 0$ вместе с формулами (4.4) – (4.7), (4.10) для определения тензоров \mathbf{e}'' , $d\mathbf{X}/dt$ и величины $d\mathbf{x}/dt$ дают аппроксимацию определяющих соотношений, для которой справедливы условия (2.3), (2.7), (4.9) и (4.12), а значит, справедливо и условие $Q \geq 0$.

5. Дифференциальные уравнения относительно определяющих параметров. Полученные выше определяющие соотношения можно преобразовать и получить два уравнения. Первое из них – тензорное. Оно связывает скорость изменения тензора напряжений с тензором скоростей деформаций и тензором $d\mathbf{h}/dt$ и является обобщением закона Гука. Второе уравнение описывает процесс передачи тепла. Оно записывается в виде квазилинейного оператора параболического типа, действующего на функцию $T = T(t, \mathbf{x})$.

Для того чтобы получить первое уравнение, продифференцируем по времени первое уравнение (2.6). Сложим полученное уравнение

с равенством (2.1), учитывая соотношение $d\boldsymbol{\varepsilon}/dt = \mathbf{e}'$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{e}'' + \mathbf{a} \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} - \boldsymbol{\alpha} \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{a}}{dt} \boldsymbol{\sigma} - \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} \theta, \\ \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_0}{dt} &= \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0}{\partial \mathbf{h}} : \frac{d\mathbf{h}}{dt}, \quad \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{h}} : \frac{d\mathbf{h}}{dt}, \quad \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \mathbf{h}} : \frac{d\mathbf{h}}{dt} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Учитывая соотношения (4.4)–(4.7), (4.13) и исключая тензор \mathbf{e}'' из уравнения (5.1), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} &= \left(\mathbf{c} - \mathcal{K} \mathbf{c} f_{\sigma} \otimes \mathbf{c} f_{\sigma} \right) \left(\mathbf{e} + \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{a}}{dt} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha} \frac{d\theta}{dt} - \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} \theta \right) - \\ &- \mathcal{K} \left(f - f_{\sigma} : \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} \right), \quad \mathcal{K} = \frac{1}{(\mathbf{c} f_{\sigma} : f_{\sigma} + \Delta)} \end{aligned} \quad (5.2)$$

В случае, когда тензоры \mathbf{a} и $\boldsymbol{\alpha}$ постоянны, а $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = 0$, из равенства (5.1) следует известное соотношение, справедливое для малых деформаций:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}'' + \mathbf{a} \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} - \boldsymbol{\alpha} \frac{d\theta}{dt}$$

Для изотермических процессов при $d\boldsymbol{\varepsilon}_0/dt = d\mathbf{a}/dt = d\boldsymbol{\alpha}/dt = 0$ выражение (5.2) преобразуется в соотношение [12]

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \left(\mathbf{c} - \frac{\mathbf{c} f_{\sigma} \otimes \mathbf{c} f_{\sigma}}{\mathbf{c} f_{\sigma} : f_{\sigma} + \Delta} \right) \mathbf{e}$$

Отметим, что соотношение (5.2) является обобщением уравнения Прандтля – Рейсса для моделей сред, в которых происходят неизотермические процессы и накопление повреждений.

Выведем уравнение процесса передачи тепла, воспользовавшись соотношением (2.4). В правую часть этого соотношения входит вектор потока тепла \mathbf{q} . Следует задать закон, который связывает вектор \mathbf{q} с градиентом температуры. Заметим, что в неразрушенном состоянии, когда среда изотропна, связь между \mathbf{q} и $\nabla\theta$ задается законом Фурье

$$\mathbf{q} = -\pi \nabla\theta \quad (5.3)$$

Здесь $\pi \geq 0$ – коэффициент теплопроводности.

В разрушенном состоянии среда становится анизотропной, и векторы \mathbf{q} и ∇T уже неколлинеарны. Связь между ними задается с помощью симметричного положительно определенного тензора $\boldsymbol{\Lambda}$ – тензора теплопроводности

$$\mathbf{q} = -\boldsymbol{\Lambda} \nabla\theta \quad (5.4)$$

Будем считать, что при описании разрушенного состояния среды тензор Λ представляется в виде

$$\Lambda = \pi q_k \mathbf{h}^k$$

Здесь $q_k = q_k(\mathbf{h}) \geq 0, k = 0, 1, 2$ – функции, удовлетворяющие условию

$$\sum q_k(\mathbf{I}) = 1$$

Из последнего равенства следует, что при $\mathbf{h} = \mathbf{I}$ соотношения (5.3) и (5.4) совпадают.

Рассмотрим систему переменных $\boldsymbol{\varepsilon}, T, \mathbf{X}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}$. Преобразуем правую часть уравнения (1.4), учитывая соотношение (4.10). Получим выражение для энтропии из соотношений (1.5) и (2.1)

$$s = - \left(s_0 + c_\varepsilon \theta + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\varepsilon} \right)$$

Подставляя вместо величины s в уравнение (1.4) правую часть последнего равенства, после преобразований приходим к уравнению

$$b_\varepsilon \frac{d\theta}{dt} = T_0 \left(\rho \left(\frac{ds_0}{dt} + \frac{dc_\varepsilon}{dt} \theta \right) + \frac{d(\boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\varepsilon})}{dt} \right) + \nabla \cdot (\Lambda \theta) - Q \quad (5.5)$$

Для системы переменных $\boldsymbol{\sigma}, T, \mathbf{X}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}$, учитывая представление потенциала Гиббса (2.19) и соотношение (1.6), аналогично получим

$$s = - \left(s_0 + c_\sigma \theta + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\alpha} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0) \right)$$

Так же как и выше, после преобразований приходим к уравнению

$$b_\sigma \frac{d\theta}{dt} = T_0 \left(\rho \left(\frac{ds_0}{dt} + \frac{dc_\sigma}{dt} \theta \right) + \frac{d(\boldsymbol{\alpha} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0))}{dt} \right) + \nabla \cdot (\Lambda \theta) - Q \quad (5.6)$$

В уравнениях (5.5) и (5.6) $b_\varepsilon = \rho \tilde{c}_\varepsilon + k_T$, $b_\sigma = \rho \tilde{c}_\sigma + k_T$, $k_T = \mathcal{K} \partial \mathcal{K} / \Delta \partial T$,

$$Q = \frac{1}{\Delta} \left(f^v - f_T \frac{dT}{dt} \right) f_\sigma : (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - \rho \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{D}} : \frac{d\mathbf{D}}{dt} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} \right)$$

Для того чтобы уравнения (5.5), (5.6) были уравнениями параболического типа, должны выполняться условия

$$b_\varepsilon > 0, \quad b_\sigma > 0$$

Если к уравнениям (5.2), (5.6), (4.4), (4.12), (3.7) добавить уравнения движения Эйлера, то получим систему уравнений с частными производными относительно переменных $\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}, \theta, \mathbf{X}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}$, которая будет моделировать движения рассматриваемых сред. Точнее, пусть имеется

тело, занимающее область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Тогда для этой системы дифференциальных уравнений можно поставить смешанную задачу, если в области Ω в некоторый момент времени $t = t_0$ заданы значения величин $\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}, \theta, \mathbf{X}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}$, а при $t \geq t_0$ заданы поверхностные силы $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{x})$ на части Γ_σ границы $\partial\Omega$ области Ω и скорости $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ на дополнительной части $\partial\Omega \setminus \Gamma_\sigma$ границы. Аналогичным образом можно вывести систему уравнений с частными производными относительно переменных $\mathbf{v}, \boldsymbol{\varepsilon}, \theta, \mathbf{X}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}$. Учитывая симметричность и положительную определенность тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$, можно показать, что полученная система уравнений с частными производными в изотермическом случае гиперболична. Этот факт является необходимым условием для строгого математического доказательства теорем существования и единственности решения данной смешанной и других задач, возникающих при моделировании эволюционных процессов в упрочняющихся упругопластических средах с учетом кинетики повреждений.

Предлагаемый способ аппроксимации определяющих соотношений можно распространить на достаточно широкий класс материалов, применяемых в машиностроении и изотропных в неразрушенном состоянии.

Литература

1. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
2. Вакуленко А. А., Качанов М. Л. Континуальная теория среды с трещинами // Изв. АН СССР МТТ. 1971. № 4. С. 159–166.
3. Stoffel M. Experimental validation of anisotropic ductile damage and failure of shock wave-loaded plates // Europ. J. Mech. Ser. A. 2007. V. 26. № 4. P. 592–608.
4. Глушко А. И., Нещеретов И. И. О континуальных моделях разрушения твердых тел при нестационарных нагрузках. // Ч. 1. Изв. АН МТТ. 1999. № 1. С. 124–138, Ч. 2. Изв. АН МТТ. 1999. № 2. С. 125–138.
5. Глушко А. И., Нещеретов И. И. О кинетическом подходе к разрушению горных пород // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 140–146.
6. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
7. Lemaitre J., Desmorat R., Souza M. Anisotropic damage law of evolution // Europ. J. Mech. Ser. A. 2000. V. 19. № 2. P. 187–208.
8. Moreau J. J. Sur le lois de froottement, de plasticité et de viscosité // C. r. Acad. sci. Ser. A et B. 1970. T. 271. № 13. P. A608–A611.

9. Halphen B., Nguyen Q. S. Sur les matériaux standards généralisés // J. Méch. 1975. V. 14. № 1. P. 39–63.
10. Prager W. The theory of plasticity: a survey of recent achievements // Proc. Inst. Mech. Engrs. 1955. V. 169. № 21. P. 41–57.
11. Казаков Р. А., Капустин С. А., Коротких Ю. Г. Моделирование процессов деформирования и разрушения материалов и конструкций. Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1999. 225 с.
12. Miyoshi Tetsuhiko. Foundations of the numerical analysis of plasticity. Tokyo: Kino-Kuniya; Amsterdam etc: North-Holland, 1985. 249 p.

Комментарии

1. Статья «О модели упругопластических упрочняющихся сред с тензорным параметром повреждаемости» опубликована в журнале «Прикладная математика и механика», 2010. Том 74, выпуск 3. С. 489–510; поступила в редакцию 10.06.2008. Авторы – А. И. Глушко, И. И. Неццеров.

2. Ниже приводится отзыв академика С. С. Григоряна, который был передан в редакцию вместе с работой. Мы наивно надеялись, что отзыв члена редколлегии журнала ускорит процесс рассмотрения работы. Но хотя этот отзыв не освободил нас от обычной процедуры рецензирования, он произвел должное впечатление на рецензента, который быстро соорудил то, что от него требовалось, так что все закончилось благополучной публикацией.

Самвел Самвелович неоднократно высказывал высокое мнение о работе в беседах с коллегами по Институту механики МГУ имени Ломоносова, а нас считал продолжателями его работ по механике сплошной среды.

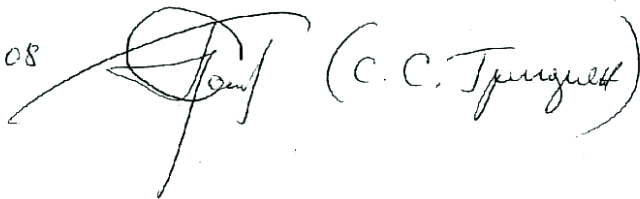
3. Первое слово в термине «анизотропное разрушение» может навести на мысль, что в процессе накопления повреждений \mathbf{D} образуется анизотропная среда. Но в механике под анизотропными подразумевают среды, у которых компоненты тензора упругости – константы. В процессе же накопления повреждений тензорная функция \mathbf{c} в какой-либо точке x не равна функции \mathbf{c} в точке y , если $\mathbf{D}(x) \neq \mathbf{D}(y)$.

Отзыв о работе А. И. Глушко, И. И. Нещеретова «Об одной модели деформации, учитывающей кинетику повреждаемости материалов»:

В работе описаны в весьма общем виде одномерные соотношения для описания механики деформации, деформирования и разрушения (повреждения в общем) твердых тел. Основной объект исследования — процесс накопления повреждений в материале, развивающийся при нагружении. Введены различные характеристики повреждаемости и с помощью современных методов термодинамических и кинетических методов описаны кинетика системы одномерных соотношений, которая вместе с уравнением движения составляет замкнутую механико-математическую модель среды.

Работа очень интересна, и ее следует опубликовать в журнале «Техническая механика и механика»

06.06.08

 (С. С. Григорян)

Отзыв академика С. С. Григоряна на работу А. И. Глушко, И. И. Нещеретова «О модели упругоупругих упрочняющихся сред с тензорным параметром повреждаемости»

Глава 11. Модель упругих разномодульных сред, учитывающая повреждаемость

Известно, что ряд материалов (например, горные породы) по-разному ведут себя при растяжении и сжатии. В случае одноосного деформированного состояния для малых деформаций это означает, что связь между напряжениями и деформациями задается в виде кусочно-линейной функции: при положительных деформациях модуль упругости имеет одно значение, а при отрицательных – другое. Для описания поведения таких сред были предложены различные модели [1–3], причем часть работ основывается на аппроксимации свободной¹ энергии, другая – на аппроксимации потенциала Гиббса. Однако вопрос о том, как обобщить эти модели на случай, когда в таких средах может протекать накопление повреждений, в вышеуказанных работах не ставился.

Математические модели упругих разномодульных сред можно условно разделить на два типа. К первому отнести те модели, где тензор напряжений задается как функция тензора деформаций, ко второму – модели, где используется обратная зависимость: тензор деформаций представляется в виде некоторой функции тензора напряжений. Характерное свойство этих моделей заключается в том, что указанные выше функции, как в первом, так и во втором случаях, не являются всюду гладкими, а имеют разрывы производной на некоторых гиперповерхностях (в шестимерном пространстве симметричных тензоров второго ранга), проходящих через начало координат, либо недифференцируемы только в начале координат.

Часто рассматривают гиперупругие разномодульные среды. В этом случае в моделях первого типа вводится скалярная функция тензора деформаций – свободная энергия, а в моделях второго типа – скалярная функция тензора напряжений – потенциал Гиббса. Для гиперупругих сред тензор напряжений задается с помощью производной свободной энергии для моделей первого типа, а для моделей второго типа тензор деформаций задается с помощью производной потенциала Гиббса. Разномодульность для таких сред равносильна тому, что производная свободной энергии (потенциала Гиббса) не является дифференцируемой функцией на гиперповерхностях. Именно этот факт является препятствием к тому, чтобы непосредственно применить подход [4] к построению моделей для не-

¹ В связи с тем, что в работе рассматривается поведение среды, следует говорить об удельной свободной энергии. Далее слово «удельная» опускается.

упругих сред с тензорным параметром повреждаемости, поскольку там предполагалось, что свободная энергия является всюду дважды дифференцируемой функцией.

Ранее получено [5] общее представление в виде ряда для свободной энергии изотропной упругой среды для случая, когда свободная энергия является однородной функцией второй степени. Удерживая разное число членов этого ряда, можно получить выражения для свободной энергии, предложенные ранее другими авторами. Каждый член этого ряда – однородная функция второй степени, бесконечно дифференцируемая всюду, кроме начала координат. Но не все члены ряда являются выпуклыми функциями. Поэтому и частичные суммы этого ряда при произвольных коэффициентах не будут выпуклыми функциями. В [5] приводится сумма первых четырех членов ряда, причем в этой сумме два слагаемых – выпуклые функции, а два других – нет. Вопрос о том, можно ли подобрать коэффициенты таким образом, чтобы сумма четырех членов была выпуклой функцией, в [5] не рассматривался.

Поскольку модель любой упругой разномодульной среды не может быть линейной даже при малых деформациях, развить достаточно общий подход к построению моделей разномодульных сред, учитывающих накопление в среде повреждений, не представляется возможным. Поэтому мы ограничиваемся представлением свободной энергии [5] для упругой разномодульной среды и приводим один из возможных способов аппроксимации свободной энергии для среды, в которой возможно накопление повреждений, характеризуемое симметричным положительно определенным тензором второго ранга.

Будем рассматривать среды, которые в состоянии, предшествующем деформированию, являются изотропными и упругими, а свободная энергия как функция тензора деформаций представляется в виде однородной функции второго порядка и дважды дифференцируемой по аргументу всюду, кроме точки $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$. Будем предполагать, что в среде может протекать процесс накопления микродефектов (микропор или микротрещин). Известно, что процесс накопления микродефектов обусловлен как изменением их размеров, так и зарождением новых дефектов. Наличие такого рода дефектов может быть характеризовано (описано в модели среды) некоторым физическим параметром \mathbf{D} , который принято называть параметром повреждаемости. Здесь мы не будем касаться проблем, связанных с введением и (физическим толкованием) параметра повреждаемости, описанием его свойств и определением их в опытах. Отправной точкой работы будет служить предположение о том, что параметр повреждаемости задан (и определен) а priori и представляет собой симметричный положительно определенный тензор второго ранга \mathbf{D} . Будем считать

также, что процесс накопления микродефектов необратим и что появление в среде микродефектов приводит к тому, что среда становится анизотропной, причем непрерывно по параметру \mathbf{D} .

В работе под упругими средами, следуя [6], будем понимать среды, при деформировании которых не наблюдаются неупругие деформации, а их состояние однозначно определяется температурой и тензорами деформаций и повреждаемости. Это означает, что при каждом фиксированном значении температуры и тензора повреждаемости между тензорами напряжений и деформаций будет существовать взаимоднозначная связь.

Будем считать, что задана свободная энергия как функция параметров состояния: температуры и тензоров деформаций и повреждаемости. Из физических представлений можно предположить, что скорость изменения тензора повреждаемости определяется только значениями параметров состояния (но не их производными), что позволяет получить обыкновенное дифференциальное (кинетическое) уравнение для определения тензора повреждаемости. Другие определяющие соотношения, связывающие тензор напряжений и удельную энтропию с определяющими параметрами, вытекают из дифференциального уравнения закона сохранения энергии (уравнения притока тепла [6]) и неравенства Клаузиуса-Дюгема. Используя эти принципы, можно также получить выражение для скорости диссипации механической энергии, обусловленной накоплением микродефектов.

Подставляя в уравнение движения Коши [7] вместо тензора напряжений его представление через тензоры деформаций и повреждаемости, приходим после преобразований к системе квазилинейных уравнений с частыми производными относительно параметров состояния рассматриваемой среды. Для этой системы можно поставить задачу Коши или эволюционную задачу с теми или иными граничными условиями и начальными данными. Естественно потребовать, чтобы эти задачи были корректно поставлены, т. е. имели единственное решение, непрерывно зависящее от начальных данных в соответствующем классе функций. Если рассматривать квазистатические процессы деформирования, когда в уравнениях движения Эйлера опускаются инерционные члены, то в этом случае корректность задачи следует из выпуклости свободной энергии $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D})$ по первому аргументу. С другой стороны, если свободная энергия дважды дифференцируема по первому аргументу в некоторой области, то из ее выпуклости следует, что в любой точке этой области вторая производная свободной энергии по первому аргументу должна быть положительным тензором четвертого ранга. Последнее требование для малых деформаций равносильно тому, что в этом случае должно

выполняться условие Адамара–Лежандра [8]. Ниже будет показано, что из условия Адамара–Лежандра вытекает гиперболичность системы дифференциальных уравнений модели в случае, когда в уравнениях движения не пренебрегают инерционными членами. Поэтому естественно найти те условия, при которых функция $\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D})$ выпукла по первому аргументу. Необходимо показать, что решения упомянутой системы квазилинейных уравнений с частными производными удовлетворяют ограничениям, вытекающим из неравенства Клаузиуса–Дюгема, а также найти ограничения на параметры модели, при которых система дифференциальных уравнений будет гиперболичной.

Движения среды будем рассматривать в декартовой системе координат $x = (x^1, x^2, x^3)$. Деформации будем считать малыми. Введем следующие обозначения: ρ – плотность среды, θ – температура, s – удельная энтропия, \mathcal{F} – свободная энергия, \mathbf{v} – вектор скорости, \mathbf{q} – вектор потока тепла, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор упругих деформаций, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, \mathbf{E} – единичный тензор второго ранга. Нет необходимости указывать, какой именно тензор деформаций (напряжений) используется в соотношениях, т.к. в рамках малых деформаций они совпадают. Благодаря этому обстоятельству нет и различий между эйлеровым и лагранжевым описанием движений среды. В рассматриваемой системе координат не будем делать различия между матрицей компонент тензора и самим тензором. Обозначим через M – пространство симметричных тензоров второго ранга, $M^+ \subset M$ – пространство положительно определенных тензоров. Для любых тензоров $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_{kl})$ и $\boldsymbol{\eta} = (\eta_{kl})$, $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\eta} \in M$ скалярное произведение $\boldsymbol{\gamma} : \boldsymbol{\eta}$ и тензорное произведение $\boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\eta}$ определяются по формуле

$$\boldsymbol{\gamma} : \boldsymbol{\eta} = \gamma_{kj} \eta_{kj}, \quad (\boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\eta})_{ijmn} = \gamma_{ij} \eta_{mn}$$

Здесь и ниже по парам повторяющихся индексов подразумевается операция суммирования:

- 1) если индексы рассматриваются как компоненты тензора, то суммирование от 1 до 3;
- 2) если индекс означает номер коэффициента и порядковый номер тензора четвертого ранга, то – от 1 до 5;
- 3) если индекс означает номер коэффициента и показатель степени тензора второго ранга, то – от 0 до 2.

Для тензора четвертого ранга $\mathbf{A} = (A_{ijmn})$ и тензора второго ранга

$\gamma = (\gamma_{ij})$ обозначим через $\mathbf{A}\gamma$ и $\gamma\mathbf{A}$ двойные свертки

$$(\mathbf{A}\gamma)_{ij} = A_{ijmn} \gamma_{mn}, \quad (\gamma\mathbf{A})_{mn} = \gamma_{ij} A_{ijmn}$$

Двойную свертку двух тензоров четвертого ранга $\mathbf{A} = (A_{ijmn})$ и $\mathbf{B} = (B_{ijmn})$ будем обозначать через

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})_{ijmn} = A_{ijpq} B_{qpmn}$$

Тензор четвертого ранга $\mathbf{A} = (A_{ijmn})$ будем называть симметричным, если выполняются соотношения

$$A_{ijmn} = A_{jimn} = A_{mnij}$$

положительным, если выполнено условие

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau} \geq 0, \quad \boldsymbol{\tau} \neq 0, \boldsymbol{\tau} \in M$$

и положительно определенным, если в последнем соотношении знак неравенства заменить знаком строго неравенства.

Введем одно определение. Рассмотрим линейное пространство симметричных тензоров второго ранга и определим бинарную операцию, которая двум любым тензорам \mathbf{a} и \mathbf{b} ставит в соответствие тензор четвертого ранга $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ по формуле

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{4}(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}^T \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\tau}^T \cdot \mathbf{a})$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}$ – любой тензор второго ранга. Можно показать, что тензор $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ симметричен, а операция \circ – коммутативна. Компоненты тензора $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ представляются в виде

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})_{ijkl} = \frac{1}{4}(a_{ik}b_{mj} + a_{im}b_{kj} + b_{ik}a_{mj} + b_{im}a_{kj})$$

При $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ тензор $\mathbf{a} \circ \mathbf{a}$ действует по правилу $(\mathbf{a} \circ \mathbf{a})\boldsymbol{\tau} = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a}$, например,

$$(\mathbf{E} \circ \mathbf{E})\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}$$

1. Анализ выпуклости функции свободной энергии с одной особой точкой. Для простоты ограничимся рассмотрением изотермических процессов и не будем указывать температуру в качестве аргумента функции свободной энергии. Рассмотрим случай, когда в исходном состоянии функция $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon})$ задана формулой

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}aj_1^2 + bj_1j_2 + \frac{1}{2}cj_2^2, \quad j_1 = \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{I}, \quad j_2 = (\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon})^{1/2} \quad (1.1)$$

Здесь a, b, c – постоянные. Функция \mathcal{F} бесконечно дифференцируема всюду, кроме начала координат, и непрерывна на пространстве M .

Так как множество $M/0$ не является выпуклым, то к функции \mathcal{F} нельзя непосредственно применить известный критерий выпуклости для дважды дифференцируемых функций [9]. Поэтому будем рассуждать следующим образом.

Предположим, что на множестве $M/\{0\}$ вторая производная функции \mathcal{F} является положительно определенным тензором четвертого ранга. Возьмем два ненулевых тензора \mathbf{v} и $\boldsymbol{\gamma}$, не принадлежащих какому-нибудь одномерному подпространству. Тогда можно найти такое не содержащее точку $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ выпуклое множество Ω в $M/0$, что выполнены условия $\mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma} \in \Omega$. Так как ограничение функции \mathcal{F} на множестве Ω дважды дифференцируемо и его вторая производная является положительно определенным тензором четвертого ранга, то оно будет выпуклой функцией на Ω , т.е. будет выполнено неравенство

$$\mathcal{F}(t\mathbf{v} + (1-t)\boldsymbol{\gamma}) \leq t\mathcal{F}(\mathbf{v}) + (1-t)\mathcal{F}(\boldsymbol{\gamma}), \quad t \in (0,1) \quad (1.2)$$

Пусть теперь тензоры \mathbf{v} и $\boldsymbol{\gamma}$ принадлежат некоторому одномерному подпространству из M . Возьмем тогда тензор $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$, не принадлежащий этому подпространству, и устремим $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ к $\boldsymbol{\gamma}$, т.е. перейдем к пределу при $\tilde{\boldsymbol{\gamma}} \rightarrow \boldsymbol{\gamma}$ в неравенстве

$$\mathcal{F}(t\mathbf{v} + (1-t)\tilde{\boldsymbol{\gamma}}) \leq t\mathcal{F}(\mathbf{v}) + (1-t)\mathcal{F}(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}), \quad t \in (0,1)$$

Тогда в силу непрерывности функции \mathcal{F} опять придем к неравенству (1.2). Наконец рассмотрим последний случай, когда $\boldsymbol{\gamma} = 0$. Тогда неравенство (1.2) вытекает из определения функции \mathcal{F} : эта функция положительно однородна второй степени и $\mathcal{F}(0) = 0$. Таким образом, неравенство (1.2) выполнено для любых $\mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma} \in M$, что означает, что функция $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon})$ выпукла.

Предположим теперь, что функция \mathcal{F} выпукла на пространстве M и дважды дифференцируема на множестве $M/\{0\}$. Тогда ограничение функции \mathcal{F} на любое выпуклое множество из $M/0$ будет выпуклой дважды дифференцируемой функцией. Откуда следует, что вторая производная функции \mathcal{F} должна быть положительным тензором четвертого ранга в любой точке $\boldsymbol{\varepsilon} \neq 0$. Тем самым показано, что выпуклость функции \mathcal{F} эквивалентна тому, что квадратичная форма

$$A_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{2} \frac{d^2 \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon})}{d\boldsymbol{\varepsilon}^2} \boldsymbol{\gamma} : \boldsymbol{\gamma}$$

положительна при $\boldsymbol{\varepsilon} \neq 0$.

Вычислим вторую производную функции \mathcal{F} при $\varepsilon \neq 0$

$$\frac{d^2 \mathcal{F}(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} = aj_1' \otimes j_1' + b(j_1' \otimes j_2' + j_2' \otimes j_1') + cj_2' \otimes j_2' + (bj_1 + cj_2) j_2'' \quad (1.3)$$

Здесь $j_1' j_1' = \mathbf{E}$, $j_2' = j_2^{-1} \varepsilon$, $j_2'' = j_2^{-1} (\mathbf{E} - j_2' \otimes j_2')$. Учитывая соотношение (1.3), квадратичную форму $A_\varepsilon = A_\varepsilon(\gamma)$ можно представить в виде

$$A_\varepsilon(\gamma) = \Phi_\varepsilon(\gamma) + \Psi_\varepsilon(\gamma), \quad \Phi_\varepsilon = a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2, \quad \xi = j(\gamma), \quad \eta = \varepsilon : \gamma, \\ \Psi_\varepsilon = j_2^{-1} (bj_1 + cj_2) \left(\gamma : \gamma - (j_2^{-1} \eta)^2 \right)$$

Так как по предположению, сделанному выше, функция (1.1) выпукла, квадратичная форма $A_\varepsilon(\gamma)$ должна быть положительной при любом $\gamma \neq 0$.

Найдем условия, которым должны удовлетворять постоянные a, b, c , для того, чтобы форма $A_\varepsilon(\gamma)$ была положительно определенной. Предположим, что справедливы неравенства

$$a > 0, \quad c > 0, \quad ac > b^2, \quad c > \sqrt{3}|b| \quad (1.4)$$

Покажем, что в этом случае квадратичная форма $A_\varepsilon(\gamma)$ неотрицательна, и следовательно функция \mathcal{F} строго выпукла.

Очевидно, что из первых трех неравенств (1.4) следует, что форма $\Phi_\varepsilon(\gamma)$ неотрицательна, а при выполнении четвертого неравенства (1.4) будет неотрицательной и форма $\Psi_\varepsilon(\gamma)$. Покажем, что формы $\Phi_\varepsilon(\gamma)$ и $\Psi_\varepsilon(\gamma)$ не обращаются одновременно в нуль при $\gamma \neq 0$.

Форма $\Psi_\varepsilon(\gamma)$ обращается в нуль только в случаях, если $\gamma = 0$ или γ пропорционален ε . Последний факт следует из неравенства Шварца. Поэтому форма $\Psi_\varepsilon(\gamma)$ положительна при $\gamma \neq \varepsilon$.

Пусть теперь $\gamma = \varepsilon$. В этом случае $\eta = \gamma : \varepsilon > 0$. Поэтому форма $\Phi_\varepsilon(\gamma)$ неотрицательна, т.к. она является строго положительной формой по параметрам ξ и η согласно критерию Сильвестра. Утверждение доказано.

2. Свободная энергия – функция тензоров деформаций и повреждаемости. Перейдем теперь к вопросу об аппроксимации свободной энергии, когда эта величина зависит не только от тензора деформаций, но и тензора повреждаемости. С этой целью введем тензор \mathbf{h}

$$\mathbf{h} = \sqrt{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}} \quad (2.1)$$

и функции $J_1 = J_1(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D})$, $J_2 = J_2(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D})$

$$J_1 = \sum_{n=1}^k \alpha_n \mathbf{C}_n \boldsymbol{\varepsilon}, \quad J_2 = \sum_{n=1}^k \alpha_n (\mathbf{C}_n^2 \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon})^{1/2}, \quad \alpha_n \geq 0, \quad \sum_{n=1}^k \alpha_n = 1, \quad k \in \mathbb{N}$$

где $\mathbf{C}_n = \mathbf{C}_n(\mathbf{D}) = \sqrt{\mathbf{p}_n} \circ \sqrt{\mathbf{p}_n}$, $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_n(\mathbf{D}) = p_{nm} \mathbf{h}^m$, $p_{nm} = p_{nm}(\mathbf{D})$, $\mathbf{C}_n^2 = \mathbf{C}_n \mathbf{C}_n$

Выше отмечалось, что тензор \mathbf{D} симметричен и положительно определен. Правая часть соотношения (2.1) имеет смысл только тогда, когда главные значения тензора \mathbf{D} ограничены сверху единицей. Физический смысл такого ограничения поясним, рассматривая случай, когда тензор \mathbf{D} – шаровой:

$$\mathbf{D} = \omega \mathbf{E} \quad (2.2)$$

Здесь $\omega \geq 0$ – скалярная величина, которую можно отождествить со скалярным параметром повреждаемости. Обычно считают, что величина ω нормирована, и ее значения не могут превышать единицу. В противном случае считается, что при превышении величиной ω значения единица среда теряет способность сопротивляться деформированию, и для описания ее поведения необходимо задавать новые определяющие соотношения. Возвращаясь к определению (2.1), используем для тензора \mathbf{D} представление (2.2). Получим

$$\mathbf{h} = \mathbf{E} \sqrt{1 - \omega}$$

Правая часть последнего равенства имеет смысл, если $\omega \leq 1$. Ограничиваясь этим замечанием, будем считать, что сформулированное ограничение на главные значения тензора \mathbf{D} выполнено. Функции p_{nm} удовлетворяют условиям

$$p_{nm} \geq 0, \quad \partial p_{nm} / \partial \mathbf{D} \leq 0, \quad p_{n0}(0) + p_{n1}(0) + p_{n2}(0) = 1 \quad (2.3)$$

Из этих условий следуют свойства функций \mathbf{p}_n

$$\mathbf{p}_n(0) = \mathbf{E}, \quad \mathbf{p}_n > 0 \quad (\mathbf{h} \neq 0)$$

и равенства

$$\mathbf{C}_n(0) = \mathbf{E} \circ \mathbf{E}, \quad J_m(\boldsymbol{\varepsilon}, 0) = j_m(\boldsymbol{\varepsilon})$$

В частном случае, когда все тензоры \mathbf{C}_n равны, $\mathbf{C}_n = \mathbf{C} = \sqrt{\mathbf{p}} \circ \sqrt{\mathbf{p}}$, функции J_1 и J_2 представляются в виде

$$J_1 = j\left(\left(\sqrt{\mathbf{p}} \circ \sqrt{\mathbf{p}}\right) \boldsymbol{\varepsilon}\right) = \mathbf{p} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad J_2 = \left(\left(\mathbf{p} \circ \mathbf{p}\right) \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}\right)^{1/2}$$

Следуя [4], аппроксимируем свободную энергию $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D})$ в виде

$$\mathcal{F} = \left(aJ_1^2 + 2bJ_1J_2 + cJ_2^2\right)/2 \quad (2.4)$$

Покажем, что функция $\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D})$, определенная по формуле (2.4), выпукла по первому аргументу на пространстве M , а производная $\partial\mathcal{F}/\partial\mathbf{D}$ при некоторых дополнительных предположениях является неположительным тензором второго ранга. Чтобы доказать эти утверждения, нужно исследовать свойства производных $\partial^2 J_2/\partial\boldsymbol{\varepsilon}^2, \partial J_1/\partial\mathbf{D}, \partial J_2/\partial\mathbf{D}$. Для упрощения выкладок введем обозначение

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{C}_n \boldsymbol{\varepsilon} = \sqrt{\mathbf{p}_n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \sqrt{\mathbf{p}_n} \quad (\partial\boldsymbol{\varepsilon}_n/\partial\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}_n)$$

и заметим, что справедливо соотношение

$$(\mathbf{C}_n^2 \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon})^{1/2} = j_2(\boldsymbol{\varepsilon}_n) \quad (2.5)$$

Если воспользоваться соотношением (2.5), то определения функций J_1 и J_2 можно представить в виде

$$J_1 = \sum \alpha_n j_1(\boldsymbol{\varepsilon}_n), \quad J_2 = \sum \alpha_n j_2(\boldsymbol{\varepsilon}_n) \quad (2.6)$$

3. Вторая производная свободной энергии по первому аргументу. Выпуклость свободной энергии. Для того, чтобы доказать выпуклость функции $\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D})$ по первому аргументу, покажем, что квадратичная форма $K_{\text{эд}}(\boldsymbol{\gamma}) = 1/2 \partial^2 \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D})/\partial\boldsymbol{\varepsilon}^2 \boldsymbol{\gamma} : \boldsymbol{\gamma}$ положительна.

Вычислим первую и вторую производных функций J_1 и J_2 по первому аргументу.

$$\frac{\partial J_1}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum \alpha_n \mathbf{C}_n \mathbf{E}, \quad \frac{\partial^2 J_1}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^2} \equiv 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum \alpha_n j_2^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_n) \mathbf{C}_n^2 \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 J_2}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^2} = \sum \alpha_n j_2^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_n) (\mathbf{C}_n^2 - j_2^{-2}(\boldsymbol{\varepsilon}_n) \mathbf{C}_n^2 \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \mathbf{C}_n^2 \boldsymbol{\varepsilon})$$

Воспользуемся соотношениями (3.1) и (3.2) и представим квадратичную форму $K_{\text{эд}}(\boldsymbol{\gamma})$ в виде

$$K_{\text{эд}}(\boldsymbol{\gamma}) = \Phi_{\text{эд}}(\boldsymbol{\gamma}) + \Psi_{\text{эд}}(\boldsymbol{\gamma})$$

Здесь

$$\Phi_{\text{эд}}(\boldsymbol{\gamma}) = a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 \quad (3.3)$$

$$\Psi_{\text{эд}}(\boldsymbol{\gamma}) = \left(\sum \alpha_n j_2^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_n) \right) \left(\mathbf{C}_n^2 \boldsymbol{\gamma} : \boldsymbol{\gamma} - j_2^{-2}(\boldsymbol{\varepsilon}_n) (\mathbf{C}_n^2 \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\gamma})^2 \right) (bJ_1 + cJ_2) \quad (3.4)$$

Переменные ξ и η в соотношении (3.3) определяются следующим образом

$$\xi = \xi(\mathbf{D}, \gamma) = \frac{\partial J_1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \gamma = j_1 \left(\left(\sum \alpha_n \mathbf{C}_n \right) \gamma \right),$$

$$\eta = \eta(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}, \gamma) = \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \gamma = \left(\sum \alpha_n j_2^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_n) \mathbf{C}_n^2 \right) \boldsymbol{\varepsilon} : \gamma$$

Очевидно, что форма $\Phi_{\varepsilon \mathbf{D}}(\gamma)$ при выполнении условий (1.4) неотрицательна, так как правая часть выражения (3.3) в переменных ξ и η является положительной формой.

Покажем, что форма $\Psi_{\varepsilon}(\gamma)$ положительна и обращается в нуль только тогда, когда тензор γ пропорционален $\boldsymbol{\varepsilon}$. Действительно, тензоры $\mathbf{C}_n^2, n=1, \dots, k$ – положительно определенные. Поэтому, согласно неравенству Шварца, справедливо неравенство

$$\mathbf{C}_n^2 \gamma : \gamma - j_2^{-2}(\boldsymbol{\varepsilon}_n) (\mathbf{C}_n^2 \boldsymbol{\varepsilon} : \gamma)^2 \geq 0, \quad n=1, \dots, k$$

причем левая часть последнего соотношения обращается в нуль только тогда, когда тензоры $\boldsymbol{\varepsilon}$ и γ пропорциональны. Так как все коэффициенты $\alpha_n \geq 0$, то отсюда следует, что первый множитель (3.4) неотрицателен.

Покажем, что и последний множитель в соотношении (3.4) неотрицателен при выполнении третьего неравенства (1.4). Для этого достаточно показать справедливость неравенства

$$|J_1| \leq \sqrt{3} J_2$$

Действительно, справедливо неравенство

$$|j_1(\boldsymbol{\varepsilon}_n)| \leq \sqrt{3} j_2(\boldsymbol{\varepsilon}_n) \tag{3.5}$$

откуда следует справедливость цепочки следующих неравенств

$$|J_1| \leq \sum \alpha_n |j_1(\boldsymbol{\varepsilon}_n)| \leq \sqrt{3} \sum \alpha_n j_2(\boldsymbol{\varepsilon}_n) \leq \sqrt{3} J_2$$

Тем самым показано, что и этот множитель неотрицателен. Следовательно, форма $K_{\varepsilon \mathbf{D}}(\gamma)$ положительна, и, значит, функция \mathcal{F} выпукла.

Точно так же как и разделе 1, можно показать, что формы $\Phi_{\varepsilon \mathbf{D}}(\gamma), \Psi_{\varepsilon \mathbf{D}}(\gamma)$ не обращаются одновременно в нуль при $\gamma \neq 0$. Откуда следует, что форма $K_{\varepsilon \mathbf{D}}(\gamma)$ положительно определена и, значит, функция $\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D})$ строго выпукла по первому аргументу.

4. Первая производная свободной энергии по второму аргументу. Найдем условия, при которых производная свободной энергии

по второму аргументу является неположительным тензором второго ранга, т. е.

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{D}} \leq 0 \quad (4.1)$$

Эта производная представляется в виде

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{D}} = (aJ_1 + bJ_2) \frac{\partial J_1}{\partial \mathbf{D}} + (bJ_1 + cJ_2) \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{D}} \quad (4.2)$$

Покажем сначала, что при выполнении условий (2.3) производные функций J_1 и J_2 по второму аргументу являются неположительными тензорами второго ранга, т. е. справедливы неравенства

$$\frac{\partial J_1}{\partial \mathbf{D}} \leq 0, \quad \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{D}} \leq 0 \quad (4.3)$$

Действительно, эти производные представляются в виде

$$\frac{\partial J_1}{\partial \mathbf{D}} = \sum \alpha_n \boldsymbol{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \mathbf{D}}, \quad \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{D}} = \sum \alpha_n (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{p}_n \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \mathbf{D}} \quad (4.4)$$

а производная $\partial \mathbf{p}_n / \partial \mathbf{D}$ имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{p}_n}{\partial \mathbf{D}} = \mathbf{h}^m \otimes \frac{\partial p_{nm}}{\partial \mathbf{D}} + p_{n1} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{D}} + p_{n2} \frac{\partial \mathbf{h}^2}{\partial \mathbf{D}}$$

Учитывая последнее равенство и соотношение

$$\frac{\partial \mathbf{h}^2}{\partial \mathbf{D}} = -\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{D}} = -\mathbf{E}$$

второе равенство (4.4) можно представить в виде

$$\frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{D}} = \sum \alpha_n \left[(\tilde{\mathbf{p}}_n : \mathbf{h}^m) \frac{\partial p_{nm}}{\partial \mathbf{D}} + p_{n1} \tilde{\mathbf{p}}_n \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{D}} - p_{n2} \tilde{\mathbf{p}}_n \right]$$

Здесь $\tilde{\mathbf{p}}_n = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{p}_n \cdot \boldsymbol{\varepsilon} > 0$.

Покажем, что каждое слагаемое в квадратных скобках является неположительным тензором второго ранга. Следствием этого факта является справедливость второго неравенства (4.3).

Действительно, согласно неравенству (2.3) первое слагаемое равно произведению положительного скаляра (свертки двух положительно определенных тензоров) на неположительный тензор второго ранга. Третье слагаемое равно произведению отрицательного скаляра $-p_{n2}$ ($p_{n2} \geq 0$) на положительно определенный тензор $\tilde{\mathbf{p}}_n$. Для аналогичного утверждения в отношении второго слагаемого необходимо доказать следующий факт.

Лемма. Пусть γ – симметричный положительно определенный тензор. Тогда симметричный тензор \mathbf{g}

$$\mathbf{g} = \gamma \frac{d\mathbf{h}}{d\mathbf{D}}$$

отрицательно определен.

Доказательство.

Рассмотрим функцию ω

$$\omega = \omega(\mathbf{D}) = \gamma : \mathbf{h}$$

Имеем

$$\frac{d\omega}{d\mathbf{D}} = \frac{d\omega}{d\mathbf{h}} \frac{d\mathbf{h}}{d\mathbf{D}} = \gamma \frac{d\mathbf{h}}{d\mathbf{D}} = \mathbf{g}$$

С другой стороны справедливы соотношения

$$\delta\mathbf{D} = -(\mathbf{h} \cdot \delta\mathbf{h} + \delta\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}), \quad \frac{d\omega}{d\mathbf{D}} : \delta\mathbf{D} = \frac{d\omega}{d\mathbf{h}} : \delta\mathbf{h} = \gamma : \delta\mathbf{h}$$

Исключая из последних двух соотношений тензор $\delta\mathbf{D}$ и считая \mathbf{h} независимой переменной, так что $\delta\mathbf{h}$ произвольно, приходим к выводу, что тензор \mathbf{g} является решением уравнения

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{g} = -\gamma$$

Это уравнение имеет единственное решение \mathbf{g} , причем тензор \mathbf{g} является отрицательно определенным, если тензор γ – положительно определенный [4]. Этим заканчивается доказательство леммы.

Аналогично доказывается справедливость первого неравенства (4.3).

Вернемся к формуле (4.2) и рассмотрим сначала второе слагаемое. Как показано выше, при условиях (1.4) первый множитель в этом слагаемом положителен. Второй множитель в этом слагаемом, согласно второму соотношению (4.3), является неположительным тензором второго ранга. Откуда следует, что и само второе слагаемое – такой же тензор.

Теперь обратимся к первому слагаемому. Второй множитель этого слагаемого – неположительный тензор. Приведем некоторые условия того, что первый множитель в этом слагаемом будет неотрицательным, т. е. справедливо неравенство

$$aJ_1 + bJ_2 \geq 0 \tag{4.5}$$

С этой целью введем семейство множеств $M_\varepsilon, M_\varepsilon \subset M$, семейство множеств M_J и множества $R_\varepsilon, R_J, R_M, R_\varepsilon \subset \mathbb{R}, R_J \subset \mathbb{R}, R_M \subset \mathbb{R}$:

$$M_\varepsilon \subset \{\boldsymbol{\varepsilon} \mid \boldsymbol{\varepsilon} \geq 0\}, \quad M_J \subset \{\boldsymbol{\varepsilon} \mid J_1(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}) \geq 0\}$$

$$R_\varepsilon \subset \{b | b \geq -a\}, \quad R_J \subset \{b | b \geq 0\}, \quad R_M \subset \{b | b \geq \sqrt{3}a\}$$

Очевидно, что справедливы включения $M_\varepsilon \subset M_J \subset M, R_\varepsilon \subset R_J \subset R_M$.

Рассмотрим следующие соотношения

$$1^\circ \ \varepsilon \in M_\varepsilon, b \in R_\varepsilon, \quad 2^\circ \ \varepsilon \in M, b \in R_M, \quad 3^\circ \ \varepsilon \in M_J, b \in R_J \quad (4.6)$$

и проверим справедливость неравенства (4.5) в случае, если ε и b удовлетворяют одному из этих соотношений. В первом соотношении из условия $\varepsilon \geq 0$ следуют неравенства

$$\varepsilon_n \geq 0, \quad j_1(\varepsilon_n) \leq j_2(\varepsilon_n)$$

откуда справедливы неравенства

$$J_1 = \sum \alpha_n j_1(\varepsilon_n) \geq \sum \alpha_n j_2(\varepsilon_n) = J_2, \quad aJ_1 + bJ_2 \geq (a+b)J_2 \geq 0$$

Во втором соотношении, учитывая неравенство (3.5), придем к неравенству

$$aJ_1 + bJ_2 = \sum \alpha_n (aj_1(\varepsilon_n) + bj_2(\varepsilon_n)) \geq (b - \sqrt{3}a) \sum \alpha_n j_2(\varepsilon_n) = (b - \sqrt{3}a)J_2 \geq 0$$

Наконец, из условий 3° непосредственно следует неравенство (4.5).

5. Аппроксимация закона изменения тензора \mathbf{D} и условие диссипации. Перейдем к описанию процесса накопления повреждений. Будем исходить из предположения, что скорость изменения тензора \mathbf{D} зависит только от тензоров ε и \mathbf{D} . Тогда закон изменения тензора \mathbf{D} можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \mathbf{f}(\varepsilon, \mathbf{D}) \quad (5.1)$$

Здесь \mathbf{f} – любая кусочно-гладкая функция со значениями в пространстве симметричных тензоров второго ранга.

Далее для простоты ограничимся рассмотрением таких процессов, при которых внешний приток энергии к телу происходит только за счет теплообмена. Тогда из неравенства Клаузиуса – Дюгема

$$\rho \frac{ds}{dt} \geq \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right)$$

и уравнения притока тепла (где U – удельная внутренняя энергия)

$$\rho \frac{dU}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}(\mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbf{q}$$

получим неравенство

$$W = -\rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{D}} : \frac{d\mathbf{D}}{dt} > 0 \quad \forall \frac{d\mathbf{D}}{dt} \neq 0 \quad (5.2)$$

Исключим производную $d\mathbf{D}/dt$ из (5.2), используя (5.1). Тогда условие (5.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{D}} : \mathbf{f} < 0 \quad (5.3)$$

Очевидно, что определить явный вид функции (5.1) можно, только опираясь на опытные данные. Единственное ограничение, которое накладывается на эту функцию из общих соображений, состоит в том, чтобы выполнялось неравенство (5.3).

Покажем, как можно задавать правую часть уравнения (5.1), которая удовлетворяет неравенству (5.3). Обозначим через $M_{\varepsilon, \mathbf{D}}$ множество всех пар тензоров ε и \mathbf{D} , для которых выполняется неравенство (4.1). Введем характеристическую функцию $\chi = \chi(\varepsilon, \mathbf{D})$ множества $M_{\varepsilon, \mathbf{D}}$

$$\chi(\varepsilon, \mathbf{D}) = \begin{cases} 1, & \text{если } (\varepsilon, \mathbf{D}) \in M_{\varepsilon, \mathbf{D}} \\ 0, & \text{если } (\varepsilon, \mathbf{D}) \notin M_{\varepsilon, \mathbf{D}} \end{cases}$$

Пусть задана некоторая функция $\tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{f}}(\varepsilon, \mathbf{D})$ со значениями в пространстве M^+ . Тогда правая часть уравнения (5.1), определенная по формуле

$$\mathbf{f}(\varepsilon, \mathbf{D}) = \chi(\varepsilon, \mathbf{D}) \tilde{\mathbf{f}}(\varepsilon, \mathbf{D})$$

удовлетворяет неравенству (5.3).

Обратимся к соотношениям (4.6). Если ε и b таковы, что выполнено одно из первых двух соотношений (4.6), то в случае первого соотношения множество $M_{\varepsilon, \mathbf{D}}$ совпадает с множеством M_ε , для второго – с пространством M . В обоих случаях на тензор \mathbf{D} не накладывается никаких ограничений. Если же ε и b таковы, что выполнено третье соотношение (4.6), то тогда множество $M_{\varepsilon, \mathbf{D}}$ совпадает с множеством M_j . В этом случае для каждого фиксированного значения тензора \mathbf{D} множество тех тензоров ε , пары ε, \mathbf{D} которых принадлежат множеству $M_{\varepsilon, \mathbf{D}}$, является полупространством в M .

Заметим, что множество функций $\tilde{\mathbf{f}}$ со значениями в пространстве M^+ достаточно широко. Примеры таких функций приведены в [4].

6. Гиперболичность системы дифференциальных уравнений. Получим систему дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять функции $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}), \varepsilon(t, \mathbf{x}), \mathbf{D}(t, \mathbf{x})$. Для этого учтем, что движения сплошной среды должны удовлетворять уравнениям движения Коши

$$\rho d\mathbf{v}/dt = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (6.1)$$

кинематическому соотношению, справедливому при малых деформациях

$$d\varepsilon/dt = \mathbf{e}(\mathbf{v}) \quad (6.2)$$

уравнению (5.1), а также определяющему соотношению

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (6.3)$$

вытекающему из уравнений (6.1) и (6.2). Исключая из уравнений (6.1) и (6.3) тензор напряжений, запишем полученное уравнение и уравнения (6.2) и (5.1) в координатном виде, и придем к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_k}{\partial t} &= p_{mn}^k (\nabla) \varepsilon_{mn} + a_{mn}^k (\nabla) D_{mn}, \quad \frac{\partial D_{mn}}{\partial t} = f_{mn}, \\ \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_m}{\partial x^n} + \frac{\partial v_n}{\partial x^m} \right), \quad \mathbf{D} = (D_{mn}), \quad \mathbf{f} = (f_{mn}), \quad k, m, n = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Здесь

$$p_{mn}^k (\nabla) = \frac{1}{\rho} A_{ksmn} \partial_s, \quad A_{ksmn} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ks} \partial \varepsilon_{mn}}, \quad \nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3), \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad a_{mn}^k (\nabla) = \frac{\partial^2 \mathcal{F} \partial_s}{\rho \partial \varepsilon_{ks} \partial D_{mn}}$$

Докажем, что при соблюдении условий, при которых справедливо неравенство (1.4), система дифференциальных уравнений (6.4) будет гиперболической [10]. Для этого перепишем систему (6.4) в матричном виде.

С этой целью введем вектор-столбцы $\mathbf{u}, \mathbf{F}, \mathbf{w}$, и матрицы $\mathbf{g} = (g_j^i), \mathbf{q}(\nabla)$

с размерностями $3 \times 6, 6 \times 3, 3 \times 6$ соответственно, по формулам

$$\begin{aligned} u^k &= \varepsilon_{kk}, \quad F^k = f_{kk}, \quad w^k = D_{kk}, \quad u^4 = \varepsilon_{23}, \quad u^5 = \varepsilon_{31}, \quad u^6 = \varepsilon_{12}, \quad F^4 = f_{23}, \quad F^5 = f_{13}, \quad F^6 = f_{12}, \\ w^4 &= D_{23}, \quad w^5 = D_{13}, \quad w^6 = D_{12}, \quad g_j^i = p_{ji}^i(\nabla), \quad g_4^i = 2p_{23}^i(\nabla), \quad g_5^i = 2p_{31}^i(\nabla), \\ &g_6^i = 2p_{12}^i(\nabla), \quad i, j, k = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

$$\mathbf{q}^T = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_3/2 & \partial_2/2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3/2 & 0 & \partial_1/2 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2/2 & \partial_1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь верхний индекс T обозначает операцию транспонирования.

Компоненты матрицы $\mathbf{a}(\nabla)$ выражаются через величины $a_{mn}^k(\nabla)$.

Так как явный вид компонент не требуется для доказательства, то мы его не приводим. Ввиду того, что гиперболичность – локальное свойство, в обозначениях матриц \mathbf{g}, \mathbf{q} и \mathbf{a} не указывается явно зависимость от функций $\mathbf{v}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}$. Тогда систему (6.4) можно записать в виде

$$\partial \mathbf{v} / \partial t = \mathbf{g} \mathbf{u} + \mathbf{a} \mathbf{w}, \quad \partial \mathbf{u} / \partial t = \mathbf{q} \mathbf{v}, \quad \partial \mathbf{w} / \partial t = \mathbf{F} \quad (6.5)$$

Характеристическую матрицу системы (6.5) обозначим через $\mathbf{P}(\lambda, \xi)$; она имеет вид

$$\mathbf{P}(\lambda, \xi) = \lambda \mathbf{E}_d - \mathbf{M}(\xi)$$

Здесь $\mathbf{E}_d = \text{diag}(\mathbf{E}_3, \mathbf{E}_6, \mathbf{E}_6)$ – блочно-диагональная матрица, \mathbf{E}_3 и \mathbf{E}_6 – единичные матрицы размерности $3 \times 3, 6 \times 6$, матрица $\mathbf{M}(\xi)$ записывается следующим образом

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{g}(\xi) & \mathbf{a}(\xi) \\ \mathbf{q}(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Обозначим через $\mathbf{X}(\lambda) = (X^1(\lambda), \dots, X^{15}(\lambda))$ собственный вектор, соответствующий собственному значению λ матрицы \mathbf{M}

$$\lambda \mathbf{X} = \mathbf{M} \mathbf{X} \quad (6.6)$$

Характеристическое уравнение последней системы имеет вид

$$\det(\mathbf{P}(\lambda, \xi)) = \lambda^6 \det \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{E}_3 & -\mathbf{g}(\xi) & -\mathbf{a}(\xi) \\ -\mathbf{q}(\xi) & \lambda \mathbf{E}_6 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \mathbf{E}_6 \end{pmatrix} = 0$$

Система (6.4) будет гиперболической, если $\forall \xi \in \mathbb{R}^3$ все собственные значения характеристической матрицы $\mathbf{P}(\lambda, \xi)$ вещественны, а совокупность собственных векторов матрицы \mathbf{M} порождает пространство \mathbb{R}^{15} . Здесь число 15 равно числу неизвестных и числу уравнений системы (6.4).

Очевидно, что $\lambda = 0$ является кратным собственным значением матрицы \mathbf{M} . Рассмотрим случай, когда $\lambda \neq 0$. Умножим матрицу $\mathbf{P}(\lambda, \xi)$ на матрицу

$$\mathbf{L}(\lambda, \xi) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_3 & -\mathbf{g}(\xi)/\lambda & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_6 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{E}_6 \end{pmatrix}$$

Матрица $\mathbf{L}(\lambda, \xi)$ не вырождена. Поэтому корни уравнения

$$\det(\mathbf{L}(\lambda, \xi) \mathbf{P}(\lambda, \xi)) = 0 \quad (6.7)$$

и корни уравнения $\det \mathbf{P}(\lambda, \xi) = 0$ одни и те же. Выполнив умножение в соотношении (6.7), придем к уравнению (для упрощения записи

аргумент ξ функций опускается)

$$\det \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{E}_3 - \frac{1}{\lambda} \mathbf{gq} & 0 & \mathbf{a} \\ -\mathbf{q} & \lambda \mathbf{E}_6 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \mathbf{E}_6 \end{pmatrix} = \lambda^3 \det(\lambda^2 \mathbf{E}_3 - \mathbf{gq}) = 0$$

Таким образом, квадраты всех ненулевых собственных значений матрицы \mathbf{M} являются собственными значениями матрицы \mathbf{gq} . Покажем, что последняя матрица симметричная и положительно определенная.

Действительно, элементы матрицы \mathbf{gq} имеют вид

$$(gq)_{ij} = \xi^m \xi^n A_{imjn}$$

Симметричность этой матрицы следует из соотношений

$$(gq)_{ij} = \xi^m \xi^n A_{imjn} = \xi^n \xi^m A_{ijnm} = (gq)_{ji}$$

а положительная определенность – из соотношения

$$\begin{aligned} (gq)_{ij} \eta^i \eta^j &= \xi^m \xi^n \eta^i \eta^j A_{imjn} = A_{imjn} \frac{(\xi^i \eta^m + \xi^m \eta^i)}{2} \frac{(\xi^j \eta^n + \xi^n \eta^j)}{2} = \\ &= \frac{1}{4} A_{imjn} (\xi \otimes \eta)_s : (\xi \otimes \eta)_s > 0 \end{aligned}$$

Здесь нижний индекс s обозначает операцию симметризации тензора $\xi \otimes \eta$, а второе равенство следует из симметричности тензора четвертого ранга \mathbf{A} при перестановках индексов.

Последнее неравенство есть не что иное, как неравенство Адамара-Лежандра. Этим доказано, что матрица \mathbf{gq} положительно определена, если тензор $\mathbf{A} = (A_{imjn})$ положительно определен. Поэтому собственные значения матрицы \mathbf{gq} положительные, а числа

$$\lambda_+ = \sqrt{\eta}, \quad \lambda_- = -\sqrt{\eta}$$

являются собственными значениями матрицы \mathbf{M} . Тем самым показано, что все собственные значения матрицы действительны.

Покажем, что все собственные векторы матрицы \mathbf{M} порождают пространство \mathbb{R}^{15} . Пусть $\mathbf{X}_1(\eta)$ – некоторый собственный вектор, соответствующий собственному значению $\eta \neq 0$ матрицы \mathbf{gq} . Тогда вектора

$$\mathbf{X}^+ = \left(\mathbf{X}_1^T(\eta), \lambda_+ (\mathbf{qX}_1(\eta))^T, \mathbf{0}_6 \right)^T, \quad \mathbf{X}^- = \left(\mathbf{X}_1^T(\eta), \lambda_- (\mathbf{qX}_1(\eta))^T, \mathbf{0}_6 \right)^T, \quad \mathbf{0}_6 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^6$$

являются собственными векторами матрицы \mathbf{M} . Линейно независимые собственные векторы матрицы \mathbf{gq} образуют базис в трехмерном пространстве векторов \mathbf{X}_1 , так как матрица \mathbf{gq} симметрична. Если обозначить эти векторы через $\mathbf{X}_{1k}(\eta_k), k=1,2,3$, то шесть векторов

$$(\mathbf{X}_{1k}(\eta_k), \lambda_+ \mathbf{qX}_1(\eta_k), 0), (\mathbf{X}_{1k}(\eta_k), \lambda_- \mathbf{qX}_1(\eta_k), 0), \quad k=1,2,3$$

порождают шестимерное подпространство в пятнадцатимерном пространстве векторов \mathbf{X} .

Очевидно, что $\lambda=0$ – собственное значение матрицы \mathbf{M} . В этом случае уравнение (6.6) можно переписать в виде системы

$$\mathbf{gX}_2 + \mathbf{aX}_3 = 0, \quad \mathbf{qX}_1 = 0$$

Здесь $\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ – шестимерные вектор-столбцы. Из второго уравнения имеем $\mathbf{X}_1 = 0$. Из первого уравнения следует, что размерность пространства решений этой системы не может быть меньше девяти. Учитывая, что при $\lambda \neq 0$ размерность подпространства, порожденного собственными векторами, равна шести, приходим к выводу, что размерность пространства, порожденного всеми собственными векторами, равна пятнадцати. Тем самым показано, что система (6.4) гиперболична. Этот факт является необходимым условием для строгого математического доказательства теорем существования и единственности решения задач, возникающих при моделировании эволюционных процессов в разномодульных нелинейно-упругих средах с учетом кинетики повреждений.

Для того чтобы рассматривать любые, а не только изотермические процессы, нужно к системе (6.4) добавить уравнение

$$c_\theta \frac{d\theta}{dt} + c_\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} + c_D \frac{d\mathbf{D}}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} - \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{D}} : \mathbf{f}_D$$

Здесь $c_\theta = -\partial^2 \mathcal{F} / \partial \theta^2, c_\varepsilon = -\partial^2 \mathcal{F} / \partial \varepsilon \partial \theta, c_D = -\partial^2 \mathcal{F} / \partial \theta \partial \mathbf{D}, \mathbf{q} = \mathbf{q}(\varepsilon, \mathbf{D}, \theta, \nabla \theta)$ – некоторая заданная функция, удовлетворяющая условию $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\varepsilon, \mathbf{D}, \theta, 0) = 0$.

В качестве примера приведем функцию следующего вида

$$\mathbf{q} = -q_m \mathbf{h}^m \cdot \nabla \theta, \quad q_m = q_m(\varepsilon, \mathbf{D}, \theta) > 0, \quad m=0,1,2, \quad \sum q_m(\varepsilon, \mathbf{E}, \theta) = 1$$

В результате приходим к системе дифференциальных уравнений, которая при $\mathbf{D} \equiv 0$ совпадает с уравнениями разномодульной несвязанной термоупругости. Анализ показывает, что предлагаемый в работе подход распространяется и на процессы, в которых учтено влияние деформирования на процесс теплопередачи. Можно показать, что задача Коши как в том, так и другом случаях будет корректно поставленной.

Литература

1. Амбарцумян С. А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука. 1982. 320 с.
2. Цвелодуб И. Ю. К разномодульной теории упругости разномодульных материалов // Динамические задачи механики сплошных сред. Сибирское отделение АН СССР. Институт гидродинамики. Вып. № 32. 1977. С. 123–131.
3. Цвелодуб И. Ю. О простейшей разномодульной теории упругости изотропных материалов // Вест. Сам. ГУ. Естественнонаучная серия. 2007. № 4 (54). С. 366–370.
4. Глушко А. И., Нещеретов И. И. О модели упругопластических упрочняющихся сред с тензорным параметром повреждаемости // ПММ, т. 74. 2010. № 2. С. 320–341.
5. Мясников В. П., Олейников А. И. Основные общие соотношения изотропно-упругой разносопротивляющейся среды // ДАН РФ. Т. 322, 1992. С. 57–60.
6. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
7. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
8. Ciarlet P.G. Mathematical elasticity. Vol. 1. Three-dimensional elasticity. Studies in mathematics and its applications, vol. 20. North-Holland-Amsterdam-N.-Y.-Oxford-Tokyo. 1989. 492 p. = Сьярле Ф. Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992. 471 с.
9. Rockafellar T. K. Convex analysis. Princeton university press, 1970. 468 p. = Рокафеллар Т. К. Выпуклый анализ. М.: Мир. 1973. 469 с.
10. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.

Комментарии

1. Английский вариант работы опубликован в журнале «*The Quarterly Journal of mechanics and applied mathematics*», Volume 65, Part 3, August 2012, p. 373–387 под названием «*Mathematical models of damaged elastic media that deform differently under tension and compression*» поступил в редакцию 03.01.2011. Авторы – А. И. Глушко, И. И. Нещеретов.

2. Отметим два свойства свободной энергии, определяемой формулой (2.4). Она есть однородная функция второго порядка относительно переменной ε , но не принадлежит к классу дважды дифференцируемых функций. Точно такими же свойствами обладает свободная энергия, введенная в монографии [1] (где она называется потенциальной энергией

упругих деформаций). Поэтому свободную энергию \mathcal{F} в обоих случаях можно записать в виде

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \langle 1 \rangle$$

Так как в настоящее время в научной литературе отсутствует общепринятое определение «разномодульная среда», то к разномодульным средам можно отнести и среды с ограниченными нормальными напряжениями, рассмотренные в главе 13. Ведь на интуитивном уровне поведение сред с ограниченными нормальными напряжениями похоже на поведение разномодульных сред; а свободная энергия таких сред, как показано в главе 13, описывается формулой $\langle 1 \rangle$ и не принадлежит к классу дважды дифференцируемых функций.

Глава 12. Модель анизотропных упругопластических сред с тензорным параметром повреждаемости

Предлагается достаточно общий подход к построению моделей твердого деформируемого тела, позволяющий описывать поведение анизотропных упругопластических сред с учетом накопления повреждений. Среда характеризуется следующими параметрами состояния: тензором упругих деформаций, температурой, скалярным параметром упрочнения и параметром повреждаемости – симметричным положительно определенным тензором второго ранга. В исходном состоянии среда ведет себя аналогично линейно упругой трансверсально-изотропной. Движения среды рассматриваются при малых деформациях и малых приращениях температуры относительно некоторого начального значения. При этих предположениях удельная свободная энергия среды может быть представлена полиномом Тейлора второй степени относительно компонент тензора упругих деформаций и приращений температуры. Коэффициенты полинома Тейлора зависят только от тензора повреждаемости, а компоненты тензора упругости в общем случае все отличны от нуля. Считаем, что функция нагружения зависит только от параметров состояния.

Построение модели среды состоит в том, чтобы, опираясь на минимальное число физических предположений, задать уравнение для тензора пластических деформаций, установить законы изменения параметра упрочнения и тензора повреждаемости и получить в результате систему уравнений относительно параметров состояния и вектора скорости. При этом требуется, чтобы решения полученной системы не противоречили второму началу термодинамики. В работе тензор скоростей пластических деформаций определяется с помощью ассоциированного закона пластического течения, а законы изменения параметра упрочнения и тензора повреждаемости представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка относительно производных по времени («кинетические» уравнения).

Преобразовывая определяющие соотношения и учитывая уравнения движения Коши, получим систему квазилинейных уравнений с частными производными (далее – система S) относительно вектора скорости и параметров состояния. Естественно потребовать, чтобы задача Коши или смешанная задача с начальными данными и граничными условиями для системы S была корректно поставленной.

В работе найдены достаточные условия, которые должны быть наложены на аппроксимацию удельной свободной энергии и функции нагружения, для того чтобы упомянутые выше задачи были корректно поставленными. Эти условия представляют собой систему неравенств, которым должны удовлетворять параметры модели.

Сначала рассматриваются изотермические процессы деформирования. В этом случае система S представляет собой систему дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными. Известно, что для таких систем уравнений гиперболичность системы является необходимым условием корректности задачи Коши. В работе показано, что при ограничениях на параметры модели, о которых говорилось выше, удельная свободная энергия будет выпуклой функцией на пространстве тензоров деформаций, а функция нагружения – выпуклой функцией на пространстве тензоров напряжений. Из этого следует, что приведенная система является гиперболической.

Решения системы S должны удовлетворять другому важному ограничению, которое продиктовано вторым началом термодинамики. Из второго начала термодинамики следует, что при необратимых процессах производство энтропии, обусловленное передачей тепла, пластическим деформированием, накоплением повреждений, должно быть положительным. Это требование означает, что любое решение системы S должно удовлетворять неравенству Клаузиуса – Дюгема. Для того чтобы показать, что это требование выполняется, в работе показано, что производная удельной свободной энергии по параметру повреждаемости является неотрицательным тензором второго ранга. Благодаря этому аппроксимация кинематического уравнения для скорости изменения тензора повреждаемости сводится к построению функций тензорных аргументов со значениями в пространстве симметричных положительно определенных тензоров второго ранга.

Наряду с используемыми в работе параметрами состояния широко применяется и другая система, в которой вместо тензора упругих деформаций используется тензор напряжений, а вместо удельной свободной энергии – потенциал Гиббса. Так как предлагаемый подход для аппроксимации удельной свободной энергии применим без каких-то ограничений и для аппроксимации потенциала Гиббса, то ограничимся описанием процедуры аппроксимации только для первого случая.

Интерес к построению моделей поведения твердых тел с тензорным параметром повреждаемости возник давно и был связан с необходимостью описания поведения металлов в условиях ползучести. Работа [1] была одной из первых, где предлагалось использовать тензоры различного

ранга для учета разного рода дефектов, возникающих при деформациях ползучести. Позже в [2] из физических соображений в качестве параметра повреждаемости был введен тензор второго ранга, с помощью которого учитывались содержащиеся в среде микротрещины и их распределение в пространстве. Хотя в ранних моделях не учитывалось обратное влияние дефектов на напряженное состояние среды, позже были предложены модели, где параметр повреждаемости включался в число аргументов свободной энергии или потенциала Гиббса. В частности, в [3] рассматривалась изотропная среда, удельная свободная энергия которой представлялась функцией первого и второго инвариантов деформаций, а модули Ламе считались убывающими функциями от скалярного параметра повреждаемости. Можно упомянуть статьи [4, 5], содержащие краткие обзоры зарубежных работ, связанных с построением моделей сред с тензорным параметром повреждаемости. Следует также указать [6], где предложен подход к построению в качестве меры повреждаемости тензоров любого наперед заданного ранга. Для более глубокого изучения механики континуального разрушения можно рекомендовать монографии [7–9].

В работе развивается подход к построению моделей сред, и в частности, к аппроксимации удельной свободной энергии и функции нагружения, предложенный в [10], где среда в исходном состоянии считалась изотропной, а функция нагружения задавалась в виде квадратичной формы от тензора напряжений. Здесь функция нагружения принимается в более общем виде, и зависит от четырех совместных инвариантов тензоров напряжений и повреждаемости.

Отметим, что в работе, также как и в [10], вследствие принятых допущений тензор упругости является функцией инвариантов тензора повреждаемости, что является далеко идущим обобщением представлений [3].

Отправной точкой статьи является предположение, что накопление в среде дефектов характеризуется симметричным положительно определенным тензором второго ранга – тензором повреждаемости. Мы не будем касаться вопросов, как ввести эту величину, а также описания ее свойств и физического смысла. Эти вопросы являются предметом независимого исследования.

Введем обозначения, которые будут использоваться. Рассматриваем движения среды в декартовой системе координат $x = (x_1, x_2, x_3)$. Обозначим через ρ – плотность среды, T – абсолютная температура, s – удельная энтропия, \mathcal{F} – удельная свободная энергия, \mathbf{v} – вектор скорости, \mathbf{q} – вектор потока тепла, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор упругих деформаций, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений,

$\mathbf{e}(\mathbf{v})$ – тензор скоростей деформаций, α – параметр упрочнения, \mathbf{D} – тензор повреждаемости, \mathbf{e}' и \mathbf{e}'' – тензоры скоростей упругих и пластических деформаций, \mathbf{I} и \mathbf{II} – единичные тензоры второго и четвертого ранга, \mathbb{M} – линейное пространство симметричных тензоров второго ранга, $O(3)$ – ортогональная группа в \mathbb{R}^3 . Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{M}$. Тензор, транспонированный тензору \mathbf{a} , обозначим через \mathbf{a}^T , первый инвариант тензора \mathbf{a} через $j(\mathbf{a})$, степени тензора \mathbf{a} через $\mathbf{a}^k, k = 0, 1, \dots$. Символом $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ обозначим свертку тензоров \mathbf{a} и \mathbf{b} , – скалярное произведение \mathbf{a} и \mathbf{b} определяем по формуле

$$\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{b} : \mathbf{a} = j(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T) = j(\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b})$$

Тензорное произведение тензоров \mathbf{a} и \mathbf{b} обозначим через $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$. Пусть $\mathbf{c} = (c_{ijkl}), \mathbf{b} = (b_{ij})$ – какие-либо тензоры четвертого и второго ранга. Тогда свертку этих тензоров по двум парам повторяющихся индексов обозначим как

$$\mathbf{cb} = ((cb)_{ij}) = (c_{ijkl} b_{kl})$$

Здесь и ниже принято следующее правило суммирования по повторяющимся парам индексов:

- 1) если индексы используются для обозначения компонент тензора, то суммирование проводится от 1 до 3;
- 2) если индексы используются для нумерации тензоров и коэффициентов, то суммирование – от 1 до 5;
- 3) если индексы используются в качестве показателя степени тензора второго ранга, то суммирование – от 0 до 2.

Так как движения среды рассматриваются в фиксированной системе координат, то не будем делать различия между самим тензором и матрицей его компонентов в этой системе координат.

Тензор четвертого ранга называется полусимметричным, если его компоненты не изменяются при перестановке первых двух индексов, а также при перестановке первой и второй пары индексов. Для таких тензоров справедливо тождество

$$\mathbf{Aa} : \mathbf{b} = \mathbf{a} : \mathbf{Ab}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{M}$$

Будем называть положительно определенным тензор четвертого ранга \mathbf{A} , удовлетворяющий условию $\mathbf{Ab} : \mathbf{b} > 0, \mathbf{b} \neq 0, \mathbf{b} \in \mathbb{M}$.

Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{M}$. Определим полусимметричный тензор четвертого ранга $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ по формуле

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}^T \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\tau}^T \cdot \mathbf{a})/4, \quad \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{M}$$

Далее рассматриваются такие процессы деформирования среды, при которых главные компоненты тензора \mathbf{D} не превышают единицу. В противном случае необходимо, опираясь на опытные данные, дополнить модель новыми соотношениями.

1. Исходные предположения. Будем рассматривать неупругие среды, состояние которых определяется параметрами состояния: тензор упругих деформаций, температура, скалярный параметр упрочнения и параметр повреждаемости – симметричный положительно определенный тензор второго ранга. Тогда удельная свободная энергия может быть представлена в виде функции от этих параметров: $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D})$.

Следуя общепринятому в теории упругопластических сред предположению, представляем тензор скоростей деформаций в виде

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}' + \mathbf{e}'' \quad (1.1)$$

При малых деформациях справедливо соотношение

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \approx \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} = \mathbf{e}' \quad (1.2)$$

Будем считать, что скорость производства энтропии Q представляется в виде

$$Q = -\mathbf{q} \cdot \frac{\nabla T}{T} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}'' - \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} - \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{D}} : \frac{d\mathbf{D}}{dt} \quad (1.3)$$

В этом случае основное уравнение второго начала термодинамики (см. [12]) можно записать следующим образом:

$$\left(\rho \frac{ds}{dt} + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) \right) T = -\mathbf{q} \cdot \frac{\nabla T}{T} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}'' - \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} - \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{D}} : \frac{d\mathbf{D}}{dt} \geq 0 \quad (1.4)$$

Известно, что производство энтропии Q должно быть равно нулю для обратимых процессов и неотрицательно для любого необратимого процесса. Тогда, принимая во внимание (1.2), из неравенства Клаузиуса-Дюгема можно получить следующие определяющие соотношения

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad s = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \quad (1.5)$$

Если в качестве параметров состояния взять $\boldsymbol{\sigma}, T, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}$, то определяющие соотношения записываются в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad s = -\frac{\partial \Psi}{\partial T} \quad (1.6)$$

где $\Psi = \Psi(\boldsymbol{\sigma}, T, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}) = \mathcal{F} - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} / \rho$ – потенциал Гиббса. Эта функция отличается только знаком от преобразования Лежандра удельной свободной энергии \mathcal{F} по переменному $\boldsymbol{\varepsilon}$. Из определения потенциала Гиббса следуют соотношения

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{D}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{D}}, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$$

что дает возможность выразить последние два слагаемые в (1.3), (1.4) через производные потенциала Гиббса по $\boldsymbol{\varepsilon}$ и \mathbf{D} .

Будем рассматривать такие процессы деформирования, при которых соотношение между тензорами напряжений и деформаций в упругой области не зависит от пластических деформаций, а скорость изменения энтропии слабо зависит от скоростей изменения параметра упрочнения, так что этой зависимостью можно пренебречь. В этом случае свободную энергию можно представить в виде (см. [10])

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}) = \mathcal{F}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}) + \mathcal{F}_1(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \mathbf{D})$$

Далее будем рассматривать процессы деформирования при малых отклонениях $\theta = T - T_0$ температуры относительно некоторого значения T_0 . Аппроксимируем правую часть последнего соотношения полиномом Тейлора второго порядка относительно величин θ и $\boldsymbol{\varepsilon}$. Тогда придем к соотношению

$$\rho \mathcal{F} = \rho \mathcal{F}_0 + s_0 \theta + \boldsymbol{\sigma}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} u_\varepsilon \theta^2 + \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\varepsilon} \theta + \frac{1}{2} \mathbf{c} \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.7)$$

Здесь $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{D}) = \rho \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1(\boldsymbol{\Sigma})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2}$ – тензорная функция, равная тензору¹ линейно упругой трансверсально–изотропной среды $\hat{\mathbf{c}}$ при $\mathbf{D} = 0$,

$$s_0 = s_0(\mathbf{D}) = \rho \frac{\partial \mathcal{F}_1(\boldsymbol{\Sigma})}{\partial T}, \quad \boldsymbol{\sigma}_0 = \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{D}) = \rho \frac{\partial \mathcal{F}_1(\boldsymbol{\Sigma})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad u_\varepsilon = u_\varepsilon(\mathbf{D}) = \rho \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1(\boldsymbol{\Sigma})}{\partial T^2} = -\rho c_\varepsilon / T_0,$$

$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{D}) = \rho \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1(\boldsymbol{\Sigma})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial T}$, $\boldsymbol{\Sigma} = (\boldsymbol{\varepsilon}, T_0, \mathbf{D})|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}, c_\varepsilon}$ – теплоемкость при постоянных деформациях и повреждаемости. Тензор \mathbf{c} полусимметричен и положительно определен. В качестве исходного состояния принимается такое состояние, при

¹ Компоненты этого тензора приведены в [13].

котором $\mathbf{D} = 0, \mathfrak{x} = 0$, а температура принимает некоторое значение. Далее будем считать, что величина \mathcal{F}_0 не зависит от параметра упрочнения, поскольку учет такой зависимости не приводит к принципиальным трудностям. Без ограничения общности можно считать, что при $\mathbf{D} = 0$

$$s_0(0) = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_0(0) = 0, \quad \mathcal{F}_0(0) = 0$$

Потенциал Гиббса, соответствующий представлению (1.7), записывается следующим образом

$$\rho\Psi = \rho\mathcal{F}_0 + s_0\theta + \boldsymbol{\varepsilon}_0 : \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{2}\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\alpha} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0)\theta + \frac{1}{2}u_\sigma\theta^2 \quad (1.8)$$

где $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{D})$ – тензор четвертого ранга, обратный к тензору \mathbf{c} , т.е. такой, что выполняется равенство $\mathbf{c} : \mathbf{a} = \mathbf{a} : \mathbf{c} = \mathbf{II}$, $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{a}\boldsymbol{\beta}$ – тензор теплового расширения, $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}_0, u_\sigma = u_\varepsilon - \mathbf{a}\boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta}$. Тензор \mathbf{a} полусимметричен и положительно определен.

Будем рассматривать среды, свойства которых в исходном состоянии не меняются при вращениях относительно некоторой оси симметрии и отражениях относительно любой плоскости, ортогональной этой оси. Этому предположению можно дать простое физическое толкование. Обозначим через \mathbf{e} вектор, направленный вдоль оси симметрии. Тогда для любых плоских волн, у которых нормаль к фронту ортогональна \mathbf{e} , скорость продольных волн c

одна и та же, $c = \sqrt{a/\rho}$, но отличается от скорости продольных волн $c_{||}$, нормаль которых к фронту совпадает с $\mathbf{e}, c_{||} = \sqrt{c/\rho}$. Величины a и c вводятся ниже в (1.12). Упомянутые вращения и отражения порождают группу $O \subset O(3)$, которая называется группой симметрий гексагональной системы (см. [13]). Точно такими же свойствами обладает линейно упругая трансверсально–изотропная среда. Это означает, что при $\mathbf{D} = 0, \mathfrak{x} = 0$ функция \mathcal{F} должна совпадать с удельной свободной энергией

$$\hat{\mathcal{F}} = \hat{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta) = \frac{1}{2\rho}\hat{\mathbf{c}}\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{\rho}\hat{\boldsymbol{\beta}} : \boldsymbol{\varepsilon}\theta + \frac{1}{2\rho}\hat{u}_\varepsilon\theta^2$$

для линейно упругой трансверсально–изотропной среды, а функция Ψ – с потенциалом Гиббса для этой среды

$$\hat{\Psi} = \hat{\Psi}(\boldsymbol{\sigma}, \theta) = -\frac{1}{2\rho}\hat{\mathbf{a}}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{\rho}\hat{\boldsymbol{\alpha}} : \boldsymbol{\sigma}\theta + \frac{1}{2\rho}\hat{u}_\sigma\theta^2$$

В двух последних равенствах $\hat{\mathbf{a}}$ – тензор податливости линейно упругой трансверсально–изотропной среды, обратный к $\hat{\mathbf{c}}$; $\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\boldsymbol{\beta}} \in \mathbb{M}, \hat{u}_\varepsilon, \hat{u}_\sigma \in \mathbb{R}$.

Предположение о свойствах среды в исходном состоянии можно сформулировать следующим образом

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta, 0, 0) = \hat{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta), \quad \Psi(\boldsymbol{\sigma}, \theta, 0, 0) = \hat{\Psi}(\boldsymbol{\sigma}, \theta) \quad (1.9)$$

Следствием условий (1.9) являются равенства

$$\mathbf{c}(0) = \hat{\mathbf{c}}, \mathbf{a}(0) = \hat{\mathbf{a}}, \boldsymbol{\alpha}(0) = \hat{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}(0) = \hat{\boldsymbol{\beta}} \quad (1.10)$$

Напомним, что тензор $\mathbf{d} = (d_{mn}) \in \mathbb{M}$ или тензор четвертого ранга $\mathbf{t} = (t_{jkmn})$ называются инвариантными при действии группы \mathfrak{G} , если выполняются соотношения

$$\begin{aligned} B_p^i B_q^j B_r^m B_s^n t_{ijmn} &= t_{pqrs}, \quad p, q, r, s = 1, 2, 3, \\ B_p^i B_q^j d_{ij} &= d_{pq}, \quad p, q = 1, 2, 3 \quad \forall B = (B_j^i) \in \mathfrak{G} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Согласно принятым предпосылкам о свойствах среды тензоры $\hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{a}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\boldsymbol{\beta}}$ инвариантны при действии группы преобразований O . Выберем систему координат $OXYZ$ в исходном состоянии так, чтобы ось OZ совпадала с направлением оси симметрии. В системе $OXYZ$ матрицы $(\alpha_{ij}), (\beta_{ij})$ компонент тензоров $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ диагональны

$$\begin{aligned} (\alpha_{ij}) &= \text{diag}(\eta_1, \eta_1, \eta_2), \quad \eta_1, \eta_2 \geq 0, \eta_1 + \eta_2 \neq 0, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}, \\ (\beta_{ij}) &= \text{diag}(\phi_1, \phi_1, \phi_2), \quad \phi_1 = (a+b)\eta_1 + c\eta_2, \phi_2 = 2c\eta_1 + d\eta_2, a, b, c, d \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (1.12)$$

а закон Гука $\boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{c}}\boldsymbol{\varepsilon}$ для линейно упругой трансверсально-изотропной среды имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= a\varepsilon_{11} + b\varepsilon_{22} + c\varepsilon_{33} + \phi_1\theta, \quad \sigma_{22} = b\varepsilon_{11} + a\varepsilon_{22} + c\varepsilon_{33} + \phi_1\theta, \quad e \in \mathbb{R}, \\ \sigma_{33} &= c(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + d\varepsilon_{33} + \phi_2\theta, \quad \sigma_{31} = e\varepsilon_{31}, \quad \sigma_{23} = e\varepsilon_{23}, \quad \sigma_{12} = (a-b)\varepsilon_{12} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Учитывая соотношения (1.7), (1.8), (1.10), (1.12), (1.13), выражения для \mathcal{F} и Ψ при $\mathbf{D} = 0, \boldsymbol{\varepsilon} = 0$ можно привести к виду

$$\begin{aligned} \rho\mathcal{F} &= \frac{1}{2} \left\{ a(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2) + d\varepsilon_{33}^2 + 2e(\varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2) + 2(a-b)\varepsilon_{12}^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2b\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 2c\varepsilon_{33}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \right\} + \left\{ \phi_1(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \phi_2\varepsilon_{33} \right\} \theta + \frac{1}{2} u_e \theta^2, \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \rho\Psi &= \rho\mathcal{F}_0 - \frac{1}{2} \left\{ \tilde{a}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2) + \tilde{d}\sigma_{33}^2 + 2\tilde{e}(\sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) + 2(\tilde{a} - \tilde{b})\sigma_{12}^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2\tilde{b}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2\tilde{c}\sigma_{33}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right\} + \left\{ \eta_1(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \eta_2\sigma_{33} \right\} \theta + \frac{1}{2} u_\sigma \theta^2 \end{aligned} \quad (1.15)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= (ad - c^2)/\Delta, \quad \tilde{b} = -(bd - c^2)/\Delta, \quad \tilde{c} = c(b - a)\Delta, \\ \tilde{d} &= (a^2 - b^2)/\Delta, \quad \tilde{e} = 1/e, \quad \Delta = (a - b)[d(a + b) - 2c^2]\end{aligned}$$

Можно ли назвать рассматриваемые среды трансверсально-изотропными? Для того чтобы ответить на этот вопрос, нужно иметь инструмент, который позволял бы классифицировать виды анизотропии сплошных сред. Для упругих сред таким инструментом является группа симметрии (группа изотропии в [14]), введенная Ноллом для функций состояния вида $T = T(\mathbf{F})$, где \mathbf{F} – градиент деформации. Для термоупругих сред, когда свободная энергия задается функцией $T = T(\mathbf{F}, T)$, группа симметрии функции T введена в [15]. Тогда говорят, что упругая среда трансверсально-изотропна, если группа симметрии функции T изоморфна группе O .

Обобщим определение группы симметрии на случай функций состояния T , зависящих от \mathbf{F} и нескольких тензорных аргументов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$:

$$T = T(\mathbf{F}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n), \quad \mathbf{a}_k \in \mathbb{T}^{m_k}, \quad k = 1, \dots, n \quad (1.16)$$

где \mathbb{T}^{m_k} – линейное пространство тензоров ранга m_k , m_k – натуральное число.

Определение. Группу $g \subset O(3)$ называем группой симметрии функции (1.16), если выполняется соотношение

$$T(\mathbf{F}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = T(\mathbf{F}Q^T, Q^{\otimes m_1} \mathbf{a}_1, Q^{\otimes m_2} \mathbf{a}_2, \dots, Q^{\otimes m_n} \mathbf{a}_n) \quad \forall Q \in g$$

Здесь $Q^{\otimes m}$, $m \in \{m_1, \dots, m_n\}$ – линейное отображение в \mathbb{T}^m , однозначно характеризуемое соотношением

$$Q^{\otimes m}(x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_m) = Qx_1 \otimes Qx_2 \otimes \dots \otimes Qx_m, \quad x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^3$$

Это определение корректно и включает в качестве частного случая определение группы симметрии, данное Ноллом.

Теперь, также как и для функций состояния вида $T(\mathbf{F})$, назовем среду трансверсально-изотропной, если группа симметрии функции состояния (1.16) изоморфна группе O , т. е. справедливо соотношение

$$g = O \quad (1.17)$$

Если в качестве функции состояния взять удельную свободную энергию \mathcal{F} , то группа симметрии g функции состояния \mathcal{F} состоит из всех ортогональных преобразований Q , для которых справедливо соотношение

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}) = \mathcal{F}(Q\boldsymbol{\varepsilon}Q^T, T, \boldsymbol{\varepsilon}, Q\mathbf{D}Q^T) \quad (1.18)$$

Очевидно, что справедливо соотношение

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, T, 0, 0) = \mathcal{F}(Q\boldsymbol{\varepsilon}Q^T, T, 0, 0) \quad \forall Q \in g$$

Учитывая соотношения (1.9), приходим к выводу, что любое преобразование из группы g принадлежит группе O , т.е. справедливо включение $g \subset O$.

Если группа g является собственной подгруппой группы O , то это означает, что рассматриваемая среда не является трансверсально-изотропной. С другой стороны, чтобы доказать справедливость соотношения (1.17), нужно показать, что для любого $Q \in O$ выполняется соотношение (1.18), для чего необходимо конкретное представление функции \mathcal{F} .

Возвратимся к выражениям (1.14) и (1.15) и далее будем анализировать только выражение для удельной свободной энергии. Заметим, что если постоянные a, b, c, d, e удовлетворяют неравенствам

$$a > 0, \quad d > 0, \quad e > 0, \quad a - |b| > 0, \quad d(a + b) > 2c^2, \quad (1.19)$$

то \mathcal{F} – выпуклая функция по переменному $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Правую часть в (1.14) преобразуем к виду, более удобному для дальнейшего анализа. Для этого введем систему из пяти тензоров четвертого ранга

$$\mathbf{E}^1 = \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}^2 = \mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\Lambda} + \boldsymbol{\Lambda} \otimes \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}^3 = \boldsymbol{\Lambda} \otimes \boldsymbol{\Lambda}, \quad \mathbf{E}^4 = \mathbf{I} \circ \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}^5 = \mathbf{I} \circ \boldsymbol{\Lambda}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (1.20)$$

где \mathbf{e}_3 – единичный вектор, направленный вдоль оси OZ . Тензоры $\mathbf{E}^1, \mathbf{E}^2, \mathbf{E}^3, \mathbf{E}^4, \mathbf{E}^5$ полусимметричны. Тензор \mathbf{E}^4 положительно определен, а тензоры $\mathbf{E}^1, \mathbf{E}^2, \mathbf{E}^3, \mathbf{E}^5$ положительны, т.е. удовлетворяют неравенству

$$\mathbf{E}^k \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau} \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \neq 0$$

Пусть \mathbb{S} – линейное пространство тензоров четвертого ранга, которые инвариантны при действии группы O . Покажем, что справедливо $\mathbf{E}^1, \dots, \mathbf{E}^5 \in \mathbb{S}$.

Для этого заметим, что тензоры \mathbf{E}^1 и \mathbf{E}^4 инвариантны относительно любых ортогональных преобразований и, следовательно, инвариантны относительно группы O . Кроме того, тензор $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{M}$ инвариантен относительно группы O . Отсюда следует инвариантность тензоров $\mathbf{E}^2, \mathbf{E}^3, \mathbf{E}^5$.

Для примера покажем, что $\mathbf{I} \circ \boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{S}$. Действительно, имеем

$$(\mathbf{I} \circ \boldsymbol{\Lambda})_{ijmn} = (\delta_{im} \Lambda_{nj} + \delta_{in} \Lambda_{mj}) / 2$$

Подставим в левую часть первого соотношения в (1.11) компоненты тензора $\mathbf{I} \circ \boldsymbol{\Lambda}$ и после преобразований получим

$$\begin{aligned} B_p^i B_q^j B_r^m B_s^n (\delta_{im} \Lambda_{nj} + \delta_{in} \Lambda_{mj}) &= (B_p^i B_r^m \delta_{im}) (B_q^j B_s^n \Lambda_{nj}) + \\ + (B_p^i B_s^n \delta_{in}) (B_q^j B_r^m \Lambda_{mj}) &= (\delta_{pr} \Lambda_{sq} + \delta_{ps} \Lambda_{rq}) = 2(\mathbf{I} \circ \boldsymbol{\Lambda})_{pqrs} \end{aligned}$$

т.е. компоненты тензора $\mathbf{I} \circ \mathbf{\Lambda}$ удовлетворяют соотношению (1.11), откуда следует инвариантность этого тензора при действии группы преобразований O . Аналогичным образом доказывается инвариантность остальных тензоров.

Для того чтобы упростить выкладки, введем линейную функцию $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (A_{ijmn}(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, где $A_{1111} = A_{2222} = x_1$, $A_{1122} = A_{2211} = x_2$, $A_{1133} = A_{3311} = A_{2233} = A_{3322} = x_3$, $A_{3333} = x_4$, $A_{2323} = A_{3232} = A_{3131} = A_{1313} = x_5/2$, $A_{1212} = A_{2121} = (x_1 - x_2)/2$, а остальные компоненты тензора \mathbf{A} равны нулю. Из определения $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ следует, что для каждого $\mathbf{a} \in \mathbb{S}$ найдется $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ такой, что справедливо $\mathbf{a} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$. В частности, тензоры $\hat{\mathbf{c}}$ и $\hat{\mathbf{a}}$ можно представить в виде

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{A}(a, b, c, d, e), \quad \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{A}(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}, \tilde{e})$$

Покажем, что тензоры $\mathbf{E}^1, \dots, \mathbf{E}^5$ образуют базис в \mathbb{S} , т.е., $\forall a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ найдется единственная последовательность μ_1, \dots, μ_5 такая, что справедливо соотношение

$$\mathbf{A}(a, b, c, d, e) = \mu_k \mathbf{E}^k, \quad \mu_k \in \mathbb{R} \quad (1.21)$$

Заметим, что каждый из тензоров $\mathbf{E}^k, k = 1, \dots, 5$, можно записать в виде

$$\mathbf{E}^k = \mathbf{A}(a^k, b^k, c^k, d^k, e^k), \quad a^k = K_{k1}, \quad b^k = K_{k2}, \quad c^k = K_{k3}, \quad d^k = K_{k4}, \quad e^k = K_{k5} \quad (1.22)$$

где матрица $\mathbf{K} = (K_{ij})$ имеет вид

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Это следует из следующих соотношений

$$\mathbf{E}^1 \boldsymbol{\gamma} = j(\boldsymbol{\gamma}) \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}^2 \boldsymbol{\gamma} = \gamma_{33} \mathbf{I} + j(\boldsymbol{\gamma}) \mathbf{\Lambda}, \quad \mathbf{E}^3 \boldsymbol{\gamma} = \gamma_{33} \mathbf{\Lambda},$$

$$\mathbf{E}^4 \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}^T), \quad \mathbf{E}^5 \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{4}(\mathbf{\Lambda} \cdot (\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}^T) + (\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}^T) \cdot \mathbf{\Lambda}), \quad \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{M}$$

Учитывая соотношение (1.22), равенство (1.21) можно переписать в виде

$$\mathbf{A}(a, b, c, d, e) = \mu_k \mathbf{A}(a^k, b^k, c^k, d^k, e^k) = \mathbf{A}(\mu_k a^k, \mu_k b^k, \mu_k c^k, \mu_k d^k, \mu_k e^k)$$

Из соотношения (1.22) и определения \mathbf{A} следует, что последнее равенство эквивалентно системе уравнений

$$a = \mu_k a^k = \mu_1 + \mu_4, \quad b = \mu_k b^k = \mu_1, \quad c = \mu_k c^k = \mu_1 + \mu_2, \\ d = \mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5, \quad e = \mu_4 + \mu_5 / 2$$

Определитель этой системы не равен нулю. Поэтому система имеет единственное решение

$$\mu_1 = b, \quad \mu_2 = c - b, \quad \mu_3 = d + a - 2(c + e), \quad \mu_4 = a - b, \quad \mu_5 = 2(e + b - a)$$

Отсюда следует, что тензоры $\mathbf{E}^1, \dots, \mathbf{E}^5$ линейно независимы. Поэтому, используя равенство (1.21), тензор $\hat{\mathbf{c}}$ представим в виде

$$\hat{\mathbf{c}} = \mu_k \mathbf{E}^k \quad (1.23)$$

Тогда, учитывая выражения (1.20), (1.23), получим

$$\hat{\mathbf{c}}\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} = (\mu_k \mathbf{E}^k) \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} = \mu_1 j^2(\boldsymbol{\varepsilon}) + 2\mu_2 \varepsilon_{33} j(\boldsymbol{\varepsilon}) + \mu_3 \varepsilon_{33}^2 + \mu_4 \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} + \mu_5 \varepsilon_{3k} \varepsilon_{k3}$$

К представлению тензора $\hat{\mathbf{c}}$ в виде (1.23) можно также прийти, опираясь на результаты из [16]. Заметим, что в указанной работе не приводится доказательство линейной независимости этой системы.

Обратимся к соотношению (1.7) при $\mathbf{D} = 0$ и заменим в нем слагаемое $\mathbf{c}\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}$ правой частью последнего равенства. Тогда получим другое представление удельной свободной энергии:

$$\rho \mathcal{F} = \frac{1}{2} \left\{ \mu_1 j^2(\boldsymbol{\varepsilon}) + 2\mu_2 \varepsilon_{33} j(\boldsymbol{\varepsilon}) + \mu_3 \varepsilon_{33}^2 + \mu_4 \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} + \mu_5 \varepsilon_{3k} \varepsilon_{k3} \right\} + \\ + \left[\phi_1(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \phi_2 \varepsilon_{33} \right] \theta + \frac{1}{2} u_\varepsilon \theta^2 \quad (1.24)$$

Если ввести квадратичные формы $\varphi_k, k = 1, 2, 3$,

$$\varphi_1(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mu_1 j^2(\boldsymbol{\varepsilon}) + 2\mu_2 \varepsilon_{33} j(\boldsymbol{\varepsilon}) + \mu_3 \varepsilon_{33}^2, \quad \varphi_2(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mu_4 \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \varphi_3(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mu_5 \varepsilon_{3k} \varepsilon_{k3}$$

то выражение в фигурных скобках в правой части (1.24) можно представить в виде суммы форм φ_k . Если коэффициенты μ_k удовлетворяют условиям

$$\mu_1 > 0, \quad \mu_3 > 0, \quad \mu_1 \mu_3 > \mu_2^2, \quad \mu_4 > 0, \quad \mu_5 \geq 0 \quad (1.25)$$

то форма $\varphi_2(\boldsymbol{\varepsilon})$ является положительно определенной, а формы $\varphi_1(\boldsymbol{\varepsilon})$ и $\varphi_3(\boldsymbol{\varepsilon})$ – положительны. Следовательно, и их сумма – положительно определенная форма. Если в соотношении (1.24) перейти обратно к первоначальным a, b, c, d, e , то из неравенств (1.25) следует, что будут выполнены условия (1.19). Следует обратить внимание на то, что неравенства (1.25) дают лишь достаточное условие для положительной определенности формы $\hat{\mathbf{c}}\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}$. Поэтому ограничиваясь значениями постоянных μ_1, \dots, μ_5 ,

которые удовлетворяют неравенствам (1.25), мы сужаем класс материалов, на который распространяется предлагаемый подход. Тем не менее, представление удельной свободной энергии в виде (1.24) дает возможность построить модель среды с тензорным параметром повреждаемости, которая не противоречит второму началу термодинамики.

2. Аппроксимация удельной свободной энергии при $\mathbf{D} \neq 0$. Кратко опишем алгоритм аппроксимации. Исходной точкой является представление тензора $\hat{\mathbf{c}}$ в виде линейной комбинации (1.23) пяти линейно независимых тензоров четвертого ранга \mathbf{E}^k . Из соотношений (1.20) следует, что каждый из них можно записать в виде билинейного оператора $g^k(x, y)$, $x, y \in \mathbb{M}$, $k = 1, \dots, 5$, со значениями в пространстве полусимметричных тензоров четвертого ранга

$$\mathbf{E}^k = g^k(\mathbf{A}^k, \mathbf{B}^k), \quad k = 1, \dots, 5, \quad \mathbf{A}^k, \mathbf{B}^k \in \{\mathbf{I}, \mathbf{\Lambda}\} \quad (2.1)$$

Введем функции $\mathbf{p}^k = \mathbf{p}^k(\mathbf{D})$, $\mathbf{q}^k = \mathbf{q}^k(\mathbf{D})$, $k = 1, \dots, 5$, удовлетворяющие при $\mathbf{D} = 0$ соотношениям $\mathbf{p}^k(0) = \mathbf{A}^k$, $\mathbf{q}^k(0) = \mathbf{B}^k$ и определим тензор $\tilde{\mathbf{E}}^k$

$$\tilde{\mathbf{E}}^k = \tilde{\mathbf{E}}^k(\mathbf{D}) = g^k(\mathbf{p}^k, \mathbf{q}^k)$$

Легко видеть, что $\tilde{\mathbf{E}}^k(0) = \mathbf{E}^k$.

Аппроксимируем тензор \mathbf{c} линейной комбинацией тензоров $\tilde{\mathbf{E}}^k$ с теми же самыми коэффициентами, которые входят в соотношение (1.23): $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{D}) = \mu_k \tilde{\mathbf{E}}^k(\mathbf{D})$.

Перейдем к явным представлениям тензоров $\tilde{\mathbf{E}}^s(\mathbf{D})$, $s = 1, \dots, 5$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}^1 &= \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_1, & \tilde{\mathbf{E}}^2 &= \mathbf{p}_1 \otimes (\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{\Lambda}) + (\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{\Lambda}) \otimes \mathbf{p}_1, \\ \tilde{\mathbf{E}}^3 &= (\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{\Lambda}) \otimes (\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{\Lambda}), & \tilde{\mathbf{E}}^4 &= \mathbf{p}_2 \circ \mathbf{q}_2, & \tilde{\mathbf{E}}^5 &= \mathbf{p}_3 \circ (\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{\Lambda}), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{h} = \sqrt{\mathbf{I} - \mathbf{D}}, \quad \mathbf{p}_k = p_{km} \mathbf{h}^m, \quad \mathbf{q}_k = q_{km} \mathbf{h}^m$$

где

$$\begin{aligned} p_{km} = p_{km}(\mathbf{D}) \geq 0, \quad q_{km} = q_{km}(\mathbf{D}) \geq 0, \quad \frac{\partial p_{km}}{\partial \mathbf{D}} \leq 0, \\ \frac{\partial q_{km}}{\partial \mathbf{D}} \leq 0, \quad \mathbf{p}_k(0) = \mathbf{q}_k(0) = \mathbf{I}, \quad k = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из соотношений (2.2), (2.3) следует, что $\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k$ положительно определены и $\tilde{\mathbf{E}}^s(0) = \mathbf{E}^k$.

При такой аппроксимации все компоненты тензора \mathbf{c} при $\mathbf{D} \neq 0$ оказываются отличными от нуля, что делает невозможным доказательство

положительной определенности тензора $\mathbf{c}(\mathbf{D})$ в общем случае. Однако, принимая во внимание определение $\tilde{\mathbf{E}}^k$, данное в (2.2), удастся доказать неравенство $\mathbf{c}\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{\varepsilon} > 0, \boldsymbol{\varepsilon} \neq 0$, и тем самым установить выпуклость свободной энергии по переменному $\boldsymbol{\varepsilon}$. Это свойство ниже используется при доказательстве гиперболичности полной системы дифференциальных уравнений.

Заметим, что правая часть в определении тензора \mathbf{h} имеет смысл, если наибольшая главная компонента тензора \mathbf{D} не превышает 1. Поясним это для случая, когда \mathbf{D} – шаровой, т.е., $\mathbf{D} = \omega \mathbf{I}$. Здесь $\omega \geq 0$ – скалярный параметр повреждаемости. В этом случае все главные компоненты тензора \mathbf{D} равны ω . После преобразований получим $\mathbf{h} = \mathbf{I}\sqrt{1-\omega}$. Это соотношение имеет смысл, если $\omega \leq 1$. Именно такое ограничение накладывается на параметр ω в известных теориях континуального разрушения.

Введем функции

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_1(\mathbf{D}) = \mu_1 \tilde{\mathbf{E}}^1 + \mu_2 \tilde{\mathbf{E}}^2 + \mu_3 \tilde{\mathbf{E}}^3, \quad \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_2(\mathbf{D}) = \mu_4 \tilde{\mathbf{E}}^4 + \mu_5 \tilde{\mathbf{E}}^5,$$

$$\Phi_k = \Phi_k(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}) = \mathbf{c}_k \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad k = 1, 2$$

Учитывая определение тензоров $\tilde{\mathbf{E}}^s, s = 1, \dots, 5$, функции Φ_k можно записать в виде

$$\Phi_1(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}) = (\mu_1 \xi^2 + 2\mu_2 \xi \eta + \mu_3 \eta^2) / 2, \quad \Phi_2(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}) = (\mu_4 \zeta_1 + \mu_5 \zeta_2) / 2 \quad (2.4)$$

где

$$\xi = \xi(\mathbf{D}) = \mathbf{p}_1 : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \eta = \eta(\mathbf{D}) = (\boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{q}_1 \cdot \boldsymbol{\Lambda}) : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{q}_1 : (\boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\Lambda}),$$

$$\zeta_1 = \zeta_1(\mathbf{D}) = \mathbf{p}_2 : (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{q}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}), \quad \zeta_2 = \zeta_2(\mathbf{D}) = \mathbf{p}_3 : (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{q}_3 \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})$$

Так как

$$\mathbf{c}(\mathbf{D}) = \mathbf{c}_1(\mathbf{D}) + \mathbf{c}_2(\mathbf{D})$$

то выражение для удельной свободной энергии можно представить в виде

$$\rho \mathcal{F} = \rho \mathcal{F}_0 + s_0 \theta + \boldsymbol{\sigma}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} u_\varepsilon \theta^2 + \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\varepsilon} \theta + \Phi_1 + \Phi_2 \quad (2.5)$$

Функция Φ_1 является композицией отображения

$$(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}) \rightarrow (\xi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}), \eta(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}))$$

и квадратичной формы

$$\hat{\Phi} = \hat{\Phi}(\xi, \eta) = (\mu_1 \xi^2 + 2\mu_2 \xi \eta + \mu_3 \eta^2) / 2$$

Очевидно, что при выполнении первых трех условий в (1.25) $\hat{\Phi}$ – положительно определенная квадратичная форма. Так как ξ и η линейно

зависят от $\boldsymbol{\varepsilon}$, то Φ_1 – положительная квадратичная форма по переменному $\boldsymbol{\varepsilon}$ при любых допустимых значениях тензора \mathbf{D} .

Проверим теперь, что при выполнении последних двух условий в (1.25) функция Φ_2 является положительно определенной квадратичной формой при любых допускаемых значениях \mathbf{D} .

Действительно, по определению имеем $\mathbf{p}_2 > 0$, $\mathbf{q}_2 > 0$ и неравенства $\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{q}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} > 0$, $\boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{q}_2 \cdot \boldsymbol{\Lambda} > 0$ выполнены. Поэтому справедливы неравенства $\mathbf{p}_2 : (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{p}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) > 0$ и $(\boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{q}_2 \cdot \boldsymbol{\Lambda}) : (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{q}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) > 0$. Отсюда следует, что правая часть равенства в определении функции Φ_2 положительна при $\boldsymbol{\varepsilon} \neq 0$.

Заметим, что из определения тензоров $\tilde{\mathbf{E}}^s$ следует, что при $\mathbf{D} = 0$ соотношения (1.24) и (2.5) совпадают. Чтобы продолжить исследование, предположим, что $\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{D}) \equiv 0$, $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{D}) = \text{const}$, а функции $s_0 = s_0(\mathbf{D})$, $u_\varepsilon = u_\varepsilon(\mathbf{D})$ удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\partial s_0}{\partial \mathbf{D}} \leq 0, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \mathbf{D}} \leq 0$$

Тогда справедливо неравенство

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{D}} \left(s_0 \theta + \boldsymbol{\sigma}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\varepsilon} \theta + \frac{1}{2} u_\varepsilon \theta^2 \right) \leq 0$$

Пусть $\mu_2 > 0$, $\boldsymbol{\varepsilon} \geq 0$. Покажем, что при выполнении условий (1.25) и (2.3) справедливы неравенства

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial \mathbf{D}} \leq 0, \quad k = 1, 2 \quad (2.6)$$

Следствием неравенств (2.6) является неравенство

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{D}} \leq 0 \quad (2.7)$$

Прежде чем доказать неравенства (2.6), введем функцию

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}, \gamma) = \hat{\mathbf{p}} - p_1 \tilde{\gamma} - p_2 \gamma$$

где $\gamma \in \mathbb{M}$, $\mathbf{p} = p_k \mathbf{h}^k$, $p_k = p_k(\mathbf{D})$, $\hat{\mathbf{p}} = (\gamma : \mathbf{h}^k) \frac{\partial p_k}{\partial \mathbf{D}}$, а тензор $\tilde{\gamma}$ является решением уравнения $\mathbf{h} \tilde{\gamma} + \tilde{\gamma} \mathbf{h} = \gamma$.

Последнее уравнение имеет единственное решение $\tilde{\gamma}$ при $\mathbf{h} \neq 0$ (см. [17]). Можно показать, что $\tilde{\gamma} > 0$ при $\gamma > 0$, $\mathbf{h} > 0$. (Простое доказательство данного утверждения приведено в [10], другое, использующее

технику функционального анализа, в [18]). Из этого утверждения и определения $\mathbf{A}(\mathbf{p}, \gamma)$ следует, что

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}, \gamma) < 0 \text{ при } \gamma > 0, p_k > 0, \frac{\partial p_k}{\partial \mathbf{D}} \leq 0, k = 0, 1, 2 \quad (2.8)$$

Теперь можно доказать следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть заданы функции

$$\mathbf{p} = p_k \mathbf{h}^k, \mathbf{q} = q_k \mathbf{h}^k, p_k = p_k(\mathbf{D}), q_k = q_k(\mathbf{D})$$

и не зависящий от \mathbf{D} тензор \mathbf{a} . Положим $\kappa(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{a}) = \mathbf{p} : \mathbf{a} \cdot \mathbf{q} \cdot \mathbf{a}^T$. Тогда справедливо равенство

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \mathbf{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{p}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{q} \cdot \mathbf{a}^T) + \mathbf{A}(\mathbf{q}, \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}) \quad (2.9)$$

Доказательство. Введем для упрощения $\mathbf{p}_a = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}$, $\mathbf{q}_a = \mathbf{a} \cdot \mathbf{q} \cdot \mathbf{a}^T$ и $\tilde{\mathbf{p}}_a, \tilde{\mathbf{q}}_a$ как решения уравнений $\mathbf{p}_a = \mathbf{h} : \tilde{\mathbf{p}}_a + \tilde{\mathbf{p}}_a : \mathbf{h}$, $\mathbf{q}_a = \mathbf{h} : \tilde{\mathbf{q}}_a + \tilde{\mathbf{q}}_a : \mathbf{h}$. Тогда справедливы соотношения

$$\delta \mathbf{h}^2 = -\delta \mathbf{D}, \mathbf{p} : \delta \mathbf{q}_a = \mathbf{p}_a : \delta \mathbf{q},$$

$$\delta \mathbf{h} : \mathbf{q}_a = \delta \mathbf{h} : (\tilde{\mathbf{q}}_a \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_a) = (\delta \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \delta \mathbf{h}) : \tilde{\mathbf{q}}_a = -\tilde{\mathbf{q}}_a : \delta \mathbf{D},$$

$$\delta \mathbf{h} : \mathbf{p}_a = -\tilde{\mathbf{p}}_a : \delta \mathbf{D}.$$

Учитывая эти равенства, вычислим приращение $\delta \kappa$ функции κ

$$\begin{aligned} \delta \kappa &= \frac{\partial \kappa}{\partial \mathbf{D}} : \delta \mathbf{D} = \delta \mathbf{p} : \mathbf{q}_a + \mathbf{p} : \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{q} \cdot \mathbf{a}^T = \delta \mathbf{p} : \mathbf{q}_a + \mathbf{p}_a : \delta \mathbf{q} = (\mathbf{q}_a : \mathbf{h}^k) \frac{\partial p_k}{\partial \mathbf{D}} : \delta \mathbf{D} + \\ &+ (p_1 \delta \mathbf{h} + p_2 \delta \mathbf{h}^2) : \mathbf{q}_a + (\mathbf{p}_a : \mathbf{h}^k) \frac{\partial q_k}{\partial \mathbf{D}} : \delta \mathbf{D} + (q_1 \delta \mathbf{h} + q_2 \delta \mathbf{h}^2) : \mathbf{p}_a = \\ &= (\mathbf{q}_a : \mathbf{h}^k) \frac{\partial p_k}{\partial \mathbf{D}} : \delta \mathbf{D} - (p_1 \tilde{\mathbf{q}}_a + p_2 \mathbf{q}_a) : \delta \mathbf{D} + (\mathbf{p}_a : \mathbf{h}^k) \frac{\partial q_k}{\partial \mathbf{D}} : \delta \mathbf{D} - (q_1 \tilde{\mathbf{p}}_a + q_2 \mathbf{p}_a) : \delta \mathbf{D} = \\ &= (\mathbf{A}(\mathbf{p}, \mathbf{q}_a) + \mathbf{A}(\mathbf{q}, \mathbf{p}_a)) : \delta \mathbf{D} \end{aligned}$$

откуда следует равенство (2.9). Доказательство закончено.

Согласно соотношениям (2.4), доказательство справедливости неравенств (2.6) сводится к проверке неравенств

$$\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{D}} \leq 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{D}} \leq 0, \quad \frac{\partial \zeta_k}{\partial \mathbf{D}} \leq 0, \quad k = 1, 2$$

при ограничениях (2.3).

Вычислим эти производные, учитывая соотношение (2.9) и легко проверяемые соотношения

$$\xi = \kappa(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}_1, \mathbf{I}), \quad \eta = \kappa(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}_1, \boldsymbol{\Lambda}), \quad \zeta_1 = \kappa(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2, \boldsymbol{\varepsilon}), \quad \zeta_2 = \kappa(\mathbf{p}_3, \mathbf{q}_3, \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\Lambda})$$

Тогда, используя лемму 1, получим равенства

$$\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{D}} = \frac{\partial \kappa(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}_1, \mathbf{I})}{\partial \mathbf{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\varepsilon}), \quad \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{D}} = \frac{\partial \kappa(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}_1, \boldsymbol{\Lambda})}{\partial \mathbf{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\Lambda}),$$

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial \mathbf{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{q}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{A}(\mathbf{q}_2, \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{p}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}),$$

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial \mathbf{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{p}_3, (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{q}_3 \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})) + \mathbf{A}(\mathbf{q}_3, (\boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{p}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\Lambda}))$$

Из соотношений (2.8) и (2.3) следует, что при $\boldsymbol{\varepsilon} \geq 0$ правые части всех соотношений, приведенных выше, – отрицательные тензоры.

Запишем выражения для производных $\partial \Phi_k / \partial \mathbf{D}, k = 1, 2$, учитывая соотношения (2.4)

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{D}} = (\mu_1 \xi + \mu_2 \eta) \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{D}} + (\mu_2 \xi + \mu_3 \eta) \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{D}}, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{D}} = \mu_4 \frac{\partial \zeta_1}{\partial \mathbf{D}} + \mu_5 \frac{\partial \zeta_2}{\partial \mathbf{D}} \quad (2.10)$$

Из первого равенства (2.10) следует, что для справедливости неравенства $\partial \Phi_1 / \partial \mathbf{D} \leq 0$ достаточно потребовать, чтобы выполнялись неравенство $\mu_2 > 0$ и $\boldsymbol{\varepsilon} \geq 0$. Действительно, тогда имеем

$$\xi \geq 0, \quad \eta \geq 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{D}} \leq 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{D}} \leq 0$$

а коэффициенты μ_1 и μ_3 положительны согласно условиям в (1.25). Справедливость неравенства $\partial \Phi_2 / \partial \mathbf{D} \leq 0$ следует из второго равенства в (2.10), если учесть неравенства $\mu_4 > 0, \mu_5 \geq 0$ и неравенства $\partial \zeta_k / \partial \mathbf{D} \leq 0, k = 1, 2$, справедливые при $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$.

Таким образом, показано, что при выполнении условий (1.25), (2.3) и неравенств $\mu_2 > 0, \boldsymbol{\varepsilon} \geq 0$ справедливо неравенство (2.6).

Перейдем к обсуждению вопросов о том, какие ограничения следует накладывать на уравнения, из которых определяются \mathbf{D} и $\boldsymbol{\varepsilon}$, а также в каком виде нужно задавать тензор $\boldsymbol{\varepsilon}''$ и вектор \mathbf{q} . При построении конкретных зависимостей, опирающихся на опытные данные, необходимо учитывать условие возрастания энтропии при необратимых процессах. Это условие заключается в том, что правая часть соотношения (1.3) должна быть неотрицательной. Первое слагаемое (1.3) обусловлено процессами теплопередачи, второе и третье – процессами пластического деформирования, последнее – процессом накопления повреждений.

Обычно принимают, что первое слагаемое должно быть неотрицательным, какими бы не были остальные слагаемые. Относительно оставшихся слагаемых для разных сред выдвигаются различные предположения.

Рассмотрим два крайних случая: 1) можно предположить, что каждое слагаемое в правой части соотношения (1.3) в отдельности должно быть неотрицательным; 2) о знаке каждого слагаемого ничего неизвестно, в то время как сумма всех слагаемых неотрицательна. Для упругопластических сред, которые удовлетворяют второму случаю, можно построить непротиворечивую модель, если предположить, что функцию нагружения можно задать в виде функции $\varphi = \varphi(\boldsymbol{\sigma}, \partial \mathcal{F} / \partial \mathbf{D}, \partial \mathcal{F} / \partial \boldsymbol{\varepsilon}, T)$, выпуклой по совокупности первых трех аргументов. Тогда, воспользовавшись принципом нормальности (см. [10, 19]), получим, что величины \mathbf{e}'' , $d\mathbf{D}/dt$ и $d\boldsymbol{\varepsilon}/dt$ пропорциональны производным функции φ по первому, второму и третьему аргументу соответственно. Можно рассмотреть и другие промежуточные варианты, например, когда сумма второго и третьего слагаемых и последнее слагаемое неотрицательны.

В работе рассматриваются среды, которые относятся к первому случаю. Примем во внимание, что накопление повреждений в среде происходит как за счет образования новых повреждений, так и за счет роста уже имеющихся. Из опытных данных известно, что оба этих фактора зависят от напряженного состояния, повреждаемости среды, тензора \mathbf{e}'' и, быть может, от T . Учитывая эти соображения, приходим к выводу, что уравнение, из которого определяется тензор \mathbf{D} , должно иметь следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \mathbf{f}_D(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}, \mathbf{e}'', T) \quad (2.11)$$

где \mathbf{f}_D – заданная функция с значениями в \mathbb{M} . Далее для простоты записи зависимостью от T в уравнении (2.11) пренебрегаем.

Потребуем, чтобы \mathbf{f}_D удовлетворяла неравенству $\mathbf{f}_D \geq 0$. Тогда из неравенства (2.7) следует, что последнее слагаемое в соотношении (1.3) неотрицательно. Чтобы обосновать необходимость неравенства $\mathbf{f}_D \geq 0$, рассмотрим величину

$$\chi_D = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{D}} : \mathbf{f}_D \quad (2.12)$$

которая с точностью до множителя совпадает с диссипацией механической энергии, обусловленной накоплением повреждений.

Как было показано, первый множитель в правой части соотношения (2.12) при $\boldsymbol{\varepsilon} \geq 0$ – симметричный отрицательный тензор второго ранга. Поэтому, если $\mathbf{f}_D > 0$, то и $\chi_D \geq 0$. Если \mathbf{f}_D не является знакоопределен-

ным тензором, то о знаке χ_D в общем случае нельзя сказать ничего определенного. Если $\mathbf{f}_D \leq 0$, то имеем $\chi_D \leq 0$. Отсюда следует, что из трех рассмотренных вариантов неравенство $\chi_D \geq 0$ будет выполнено только при $\mathbf{f}_D \geq 0$.

Если же условие $\varepsilon \geq 0$ не выполнено, то принимаем, что при $\varepsilon < 0$ функция \mathbf{f}_D должна быть тождественно равной нулю. Такое предположение имеет естественное физическое обоснование. Состояние среды, при котором выполняется условие $\varepsilon < 0$, соответствует полю растягивающих напряжений. Известно, что для многих материалов, например, для большинства металлов, накопление повреждений происходит только при выполнении такого условия.

Покажем, что \mathbf{f}_D должна быть положительно однородной функцией первой степени по переменному \mathbf{e}'' . Чтобы убедиться в этом, снова обратимся к величине χ_D , которая зависит от тензора \mathbf{e}'' и обусловлена процессом накопления повреждаемости. Поэтому величина χ_D должна рассматриваться в качестве одного из слагаемых функции диссипации, характеризующей скорость производства энтропии при упругопластическом деформировании. Но для упругопластических сред функция диссипации должна быть положительно однородной первой степени по переменному \mathbf{e}'' . Так как первый сомножитель в определении величины χ_D не зависит от тензора \mathbf{e}'' , то из соотношения (2.12) следует, что функция \mathbf{f}_D должна быть положительно однородной первой степени по переменному \mathbf{e}'' , т.е. должно выполняться соотношение

$$\mathbf{f}_D(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}, \lambda \mathbf{e}'') = \lambda \mathbf{f}_D(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}, \mathbf{e}''), \quad \forall \lambda > 0$$

из которого следует равенство $\mathbf{f}_D(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}, 0) = 0$.

Приведем несколько примеров явного представления функции \mathbf{f}_D . Более подробно этот вопрос рассмотрен в [10]. С этой целью введем симметричный положительно определенный тензор \mathbf{g} следующим образом. Тензор \mathbf{g} коаксиален тензору \mathbf{e}'' , а его главные компоненты g_k определяются по формуле $g_k = |e_k''|$, где e_k'' , $k = 1, 2, 3$, – главные компоненты тензора \mathbf{e}'' . В этом случае функция \mathbf{f}_D определяется по формуле

$$\mathbf{f}_D = p_k \left((\mathbf{g})^{1/2} \cdot \left(-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{D}} \right)^k \cdot (\mathbf{g})^{1/2} \right) + q_k \boldsymbol{\sigma}^k \cdot \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\sigma}^k$$

где $p_k(\mathbf{D}) \geq 0, q_k(\mathbf{D}) \geq 0, k = 0, 1, 2,$ – известные функции. Нетрудно проверить, что таким образом определенная функция \mathbf{f}_D удовлетворяет сформулированным выше условиям. В частном случае, когда из всех шести функций p_k, q_k только q_0 отлична от нуля, функция \mathbf{f}_D совпадает с законом изменения тензора \mathbf{D} , предложенным в [4].

Может оказаться, что у некоторых сред скорость изменения тензора повреждаемости не зависит от тензора скоростей пластических деформаций

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \mathbf{f}_D(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) \quad (2.13)$$

В этом случае функция \mathbf{f}_D должна удовлетворять только условию: $\mathbf{f}_D \geq 0$. Укажем достаточно общий класс функций, удовлетворяющих этому условию:

$$\mathbf{f}_D = p_k \left(\left(-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{D}} \right)^k \cdot \mathbf{h}^k \cdot \left(-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{D}} \right)^k \right) + q_k \mathbf{h}^k \cdot \left(-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{D}} \right) \cdot \mathbf{h}^k$$

где $p_k = p_k(\mathbf{D}) \geq 0, q_k = q_k(\mathbf{D}) \geq 0, k = 0, 1, 2,$ – некоторые функции. Из последнего соотношения при $p_k \equiv 0$ следует, что диссипация механической энергии, обусловленная накоплением повреждений, является квадратичной формой относительно $\partial \mathcal{F} / \partial \mathbf{D}$, что соответствует традиционному представлению диссипации в термодинамике необратимых процессов.

Следует отметить, что физические свойства сред, для которых закон изменения тензора \mathbf{D} имеет вид (2.11), будут качественно отличаться от сред, для которых закон изменения \mathbf{D} имеет вид (2.13). В первом случае тензор \mathbf{D} изменяется только при пластическом деформировании и должен рассматриваться как параметр упрочнения. Во втором случае \mathbf{D} может изменяться как при упругом, так и при неупругом деформировании; более того, допустимы такие процессы пластического деформирования, при которых \mathbf{D} может не меняться.

3. Основные положения теории упрочняющихся упругопластических сред. Область допустимых значений тензора $\boldsymbol{\sigma}$ в момент времени $t = \tau$ обозначим через $M_\tau \subset \mathbb{M}$. Упругопластические среды, для которых семейство множеств $\{M_\tau\}$ зависит от процесса пластического деформирования, принято называть упрочняющимися. В общем случае пересечение $M_\tau \cap M_p$ любых двух множеств M_τ и M_p семейства $\{M_\tau\}$ при $\tau \neq p$ не совпадает ни с M_τ , ни с M_p , а предел упругости может как возрастать, так и убывать в процессе деформирования.

Рассмотрим случай, когда семейство $\{M_\tau\}$ может быть представлено в следующем виде $T, \mathfrak{a}, \mathbf{D} \rightarrow M_{T\mathfrak{a}\mathbf{D}} \subset \mathbb{M}$, так, что справедливо соотношение

$$M_\tau = M_{T\mathfrak{a}\mathbf{D}} \text{ при } T = T(\tau), \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\tau), \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}(\tau)$$

Далее рассматриваем среды, в которых предел упругости не уменьшается при растяжении и сжатии. Тогда получим $M_\tau \subset M_p$ при $\tau < p$.

Введем функцию нагружения $\varphi = \varphi(\boldsymbol{\sigma}, T, \mathfrak{a}, \mathbf{D})$, используя соотношение

$$M_{T\mathfrak{a}\mathbf{D}} = \{ \boldsymbol{\sigma} : \varphi(\boldsymbol{\sigma}, T, \mathfrak{a}, \mathbf{D}) \leq 0 \}$$

Так как $\boldsymbol{\sigma} = 0 \in M_{T\mathfrak{a}\mathbf{D}}$, то должно выполняться неравенство

$$\varphi(0, T, \mathfrak{a}, \mathbf{D}) < 0$$

Примем, что \mathfrak{a} должен удовлетворять уравнению

$$\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = \chi(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{a}, \mathbf{e}'') > 0, \quad \mathbf{e}'' \neq 0 \quad (3.1)$$

где χ – положительно однородная функция степени 1 по переменному \mathbf{e}'' , удовлетворяющая условию $\chi(\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{a}, 0) = 0$. Тогда условия монотонности предела упругости могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{a}} \chi + (1 - \zeta) \varphi^D < 0 \quad (3.2)$$

где

$$\varphi^D = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{D}} : \mathbf{f}_D, \quad \zeta = \begin{cases} 0, & \text{если } \partial \mathbf{f}_D / \partial \mathbf{e}'' \neq 0 \\ 1, & \text{если } \partial \mathbf{f}_D / \partial \mathbf{e}'' = 0 \end{cases}$$

Обращаем внимание на то, что величина ζ равна 0 (соответственно, равна 1), если закон изменения \mathbf{D} определяется уравнением (2.11) (соответственно, (2.13)).

Определим тензор \mathbf{e}'' с помощью ассоциированного закона течения

$$\mathbf{e}'' = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \lambda \geq 0, \quad \varphi \leq 0, \quad \lambda \varphi = 0 \quad (3.3)$$

Покажем, что при $\varphi = 0, \lambda > 0$ выполняется так называемое условие активного нагружения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \zeta \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{D}} : \frac{d\mathbf{D}}{dt} > 0 \quad (3.4)$$

В самом деле, пусть на некотором полуинтервале времени $t_0 \leq t < t_1$ выполняется равенство $\varphi = 0$. Дифференцируя его по времени, получим с учетом соотношений (3.1), а также (2.11) либо (2.13)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{D}} : \mathbf{f}_D + \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\varkappa}} : \boldsymbol{\chi} = 0 \quad (3.5)$$

Из соотношений (3.1) и (2.11) следует, что левая часть в соотношении (3.5) зависит от \mathbf{e}'' . Исключая \mathbf{e}'' с помощью первого равенства в (3.3), получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\sigma} \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \zeta \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{D}} : \frac{d\mathbf{D}}{dt} = -\lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\varkappa}} : \tilde{\boldsymbol{\chi}} + (1 - \zeta) \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{D}} : \tilde{\mathbf{f}}_D \right) \quad (3.6)$$

где

$$\tilde{\boldsymbol{\chi}} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varkappa}, \partial \varphi / \partial \boldsymbol{\sigma}) > 0, \quad \tilde{\mathbf{f}}_D = \mathbf{f}_D(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}, \partial \varphi / \partial \boldsymbol{\sigma})$$

Согласно неравенству (3.2) правая часть соотношения (3.6) положительна, следовательно, справедливо соотношение (3.4). Обратно, если выполнено соотношение (3.4), то из соотношения (3.6) следует, что $\lambda > 0$.

При $\varphi = 0, \lambda = 0$ имеем $\mathbf{e}'' = 0$. Такое состояние среды называется нейтральным нагружением. Как известно, величина $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}''$ определяет скорость производства энтропии при пластическом деформировании. Для того чтобы было выполнено условие диссипации при пластическом деформировании, следует потребовать, чтобы функция φ была выпукла по переменному $\boldsymbol{\sigma}$. Тогда справедливо неравенство

$$\varphi(\boldsymbol{\tau}, T, \boldsymbol{\varkappa}, \mathbf{D}) > \varphi(\boldsymbol{\sigma}, T, \boldsymbol{\varkappa}, \mathbf{D}) + \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in M_{T\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{D}}$$

Положим в этом неравенстве $\boldsymbol{\tau} = 0$ и пусть тензор $\boldsymbol{\sigma}$ таков, что выполняется условие $\varphi(\boldsymbol{\sigma}, T, \boldsymbol{\varkappa}, \mathbf{D}) = 0$. Тогда из этого неравенства следует, что

$$\partial \varphi / \partial \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} \geq -\varphi(0, T, \boldsymbol{\varkappa}, \mathbf{D}) > 0$$

что означает

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}'' = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\sigma} \geq 0$$

Величину λ в соотношениях (3.3), (3.6) можно представить в явном виде. Для этого рассмотрим некоторую точку P сплошной среды. Процесс деформирования в точке P можно представить как комбинацию трех возможных состояний.

1. На некотором полуинтервале времени $t_0 \leq t < t_0 + \delta, \delta > 0$ среда в точке P находится в упругом состоянии.

2. На некотором полуинтервале времени $t_0 \leq t < t_0 + \delta, \delta > 0$ напряженно-деформируемое состояние в точке P соответствует поверх-

ности нагружения, но условие активного нагружения не выполнено. В этом случае среда в точке P по-прежнему находится в упругом состоянии, а величина λ равна 0.

3. На некотором не равном нулю полуинтервале времени напряженно-деформируемое состояние в точке P характеризуется тем, что выполняются условие активного нагружения и равенство $\varphi = 0$. В этом случае величина λ представляется в виде

$$\lambda = -\frac{1}{\varphi^p} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \varphi^e \right), \varphi^e = \frac{\partial \varphi}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \zeta \varphi^D, \varphi^p = \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \tilde{\boldsymbol{\chi}} + (1 - \zeta) \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{D}} : \tilde{\mathbf{f}}_D \quad (3.7)$$

В самом деле, введем функцию $\phi(t) = \varphi(\boldsymbol{\sigma}(t), T(t), \boldsymbol{\varepsilon}(t), \mathbf{D}(t))$. Из условий 1 следует, что при $t_0 \leq t < t_0 + \delta$ справедливо соотношение (3.5). Вычисляя $d\phi/dt$ по правилу дифференцирования сложной функции и заменяя в соотношении (3.5) тензор \mathbf{e}'' на $\lambda \partial \varphi / \partial \boldsymbol{\sigma}$ после преобразований приходим к первому соотношению в (3.7). Заметим, что в правой части третьего равенства (3.7) стоит то же самое выражение, что и в условии монотонности (3.2). Отсюда следует, что величина φ^p удовлетворяет неравенству

$$\varphi^p < 0 \quad (3.8)$$

4. Аппроксимация функции нагружения при $\mathbf{D} \neq 0$. Обозначим через $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\boldsymbol{\sigma}, T, \boldsymbol{\varepsilon})$ функцию нагружения при $\mathbf{D} = 0$. Напомним, что $\tilde{\varphi}$ предполагается инвариантной при действии группы O . Из результатов работы [20] следует, что $\tilde{\varphi}$ должна иметь вид $\tilde{\varphi} = f \circ \mathbf{J}$, где

$$f = f(\mathbf{s}), \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_7), \mathbf{J} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}, T, \boldsymbol{\varepsilon}) = (j_1, \dots, j_7),$$

$$j_1 = j(\boldsymbol{\sigma}), j_2 = j(\boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\sigma}), j_3 = j(\boldsymbol{\sigma}^2), j_4 = j(\boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\sigma}^2), j_5 = j(\boldsymbol{\sigma}^3), j_6 = T, j_7 = \boldsymbol{\varepsilon}$$

Для того чтобы продолжить описание среды при $\mathbf{D} \neq 0$, предположим следующее:

1. $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_6)$;

2. $f = f(j_1, j_2, j_3, j_4, T, \boldsymbol{\varepsilon})$ – дважды дифференцируемая, выпуклая по переменным j_1, j_2, j_3, j_4 функция;

3. $\frac{\partial f}{\partial j_k} \geq 0, k = 3, 4$.

Лемма 2. Пусть функция $f(j_1, j_2, j_3, j_4, T, \boldsymbol{\varepsilon})$ удовлетворяет условиям 2 и 3. Тогда функция $\boldsymbol{\sigma} \rightarrow f(j_1(\boldsymbol{\sigma}), j_2(\boldsymbol{\sigma}), j_3(\boldsymbol{\sigma}), j_4(\boldsymbol{\sigma}), T, \boldsymbol{\varepsilon})$ будет выпуклой.

Доказательство. Действительно, имеем

$$\tilde{\varphi}(\boldsymbol{\sigma}, T, \boldsymbol{x}) = f(j_1(\boldsymbol{\sigma}), j_2(\boldsymbol{\sigma}), j_3(\boldsymbol{\sigma}), j_4(\boldsymbol{\sigma}), T, \boldsymbol{x}) \quad (4.1)$$

Введем квадратичную форму $F(\boldsymbol{\tau})$

$$F(\boldsymbol{\tau}) = \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{M}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2}(\boldsymbol{\sigma}, T, \boldsymbol{x})$$

Покажем, что $F(\boldsymbol{\tau})$ положительна. Тогда, принимая во внимание критерий выпуклости дважды дифференцируемых функций (см. [21]), следует, что функция $\tilde{\varphi}$ выпуклая по $\boldsymbol{\sigma}$. Действительно, из определения функции f следует, что

$$F(\boldsymbol{\tau}) = \frac{\partial^2 f}{\partial j_k \partial j_m} \xi_k \xi_m + \frac{\partial f}{\partial j_k} \frac{\partial^2 j_k}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau}, \quad \xi_k = \frac{\partial j_k}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\tau}, \quad k, m = 1, \dots, 4$$

Выпуклость f по j_1, j_2, j_3, j_4 подразумевает, что справедливы неравенства

$$\frac{\partial^2 f}{\partial j_k \partial j_k} \xi_k \xi_k \geq 0$$

Далее заметим, что справедливы соотношения

$$\frac{\partial^2 j_k}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} = 0, \quad k = 1, 2, \quad \frac{\partial^2 j_k}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} > 0, \quad k = 3, 4$$

Тогда из неравенств $\frac{\partial f}{\partial j_3} \geq 0, \frac{\partial f}{\partial j_4} \geq 0$ следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial j_k} \frac{\partial^2 j_k}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau} \geq 0$$

Таким образом, мы показали, что квадратичная форма $F(\boldsymbol{\tau})$ – сумма двух положительных квадратичных форм. Это завершает доказательство.

Например, пусть функция f задана в виде

$$f(s_1, \dots, s_4, T, \boldsymbol{x}) = g_1(s_1, s_2, T, \boldsymbol{x}) + g_2(s_3, s_4, T, \boldsymbol{x})$$

где g_1 и g_2 – выпуклые функции по первым двум аргументам,

$$\partial g_1 / \partial s_3 \geq 0, \quad \partial g_2 / \partial s_4 \geq 0$$

Тогда очевидно, что f удовлетворяет Лемме 2.

Заметим, что справедливо соотношение

$$\frac{\partial^2 j_5}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^2 : \boldsymbol{\sigma}$$

Очевидно, что квадратичная форма

$$\boldsymbol{\tau} \rightarrow \boldsymbol{\tau}^2 : \boldsymbol{\sigma} \quad (4.2)$$

положительна только при $\boldsymbol{\sigma} \geq 0$. Именно из-за этого свойства квадратичной формы (4.2) следует, что функцию f надо считать не зависящей от j_5 .

Теперь аппроксимируем функцию нагружения φ при $\mathbf{D} \neq 0$ как

$$\varphi(\boldsymbol{\sigma}, T, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}) = f(I_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}), \dots, I_4(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}), T, \boldsymbol{\varepsilon}), \quad (4.3)$$

где $I_k = I_k(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$ – совместные инварианты тензоров $\boldsymbol{\sigma}$ и \mathbf{D}

$$I_1 = \mathbf{p}_1 : \boldsymbol{\sigma}, I_2 = (\boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{q}_1 \cdot \boldsymbol{\Lambda}) : \boldsymbol{\sigma}, I_3 = \mathbf{p}_2 : (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}), I_4 = \mathbf{p}_3 : (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{q}_3 \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\sigma})$$

$$\text{Функции } \mathbf{p}_k = \mathbf{p}_k(\mathbf{D}), \mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k(\mathbf{D}), k = 1, 2, 3, \text{ имеют вид} \quad (2.2)$$

и удовлетворяют условиям

$$\mathbf{p}_k(0) = \mathbf{q}_k(0) = \mathbf{I} \quad (4.4)$$

Из условий (4.4) следует, что справедливы соотношения

$$j_k(\boldsymbol{\sigma}) = I_k(\boldsymbol{\sigma}, 0), \quad k = 1, 2, 3, 4$$

Заметим, что функция нагружения φ может быть получена из функции $\tilde{\varphi}$ заменой переменных в правой части соотношения (4.1) $I_k \rightarrow j_k$. Так как

$$\frac{\partial^2 I_k}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} = 0, \quad k = 1, 2, \quad \frac{\partial^2 I_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} = \mathbf{p}_2 \circ \mathbf{q}_2 \geq 0,$$

$$\frac{\partial^2 I_4}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} = \mathbf{p}_3 \circ (\boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{q}_3 \cdot \boldsymbol{\Lambda}) \geq 0, \quad \mathbf{p}_k \geq 0, \mathbf{q}_k \geq 0, \quad k = 2, 3,$$

то согласно Лемме 2 функция φ выпукла по $\boldsymbol{\sigma}$.

Пусть

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{q}_1 = \mathbf{I}, \quad \mathbf{p}_k = \mathbf{p}_k(\mathbf{D}) = p_{km} \mathbf{D}^m, \quad \mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k(\mathbf{D}) = q_{km} \mathbf{D}^m \quad (4.5)$$

где функции $p_{km} = p_{km}(\mathbf{D})$, $q_{km} = q_{km}(\mathbf{D})$ удовлетворяют условиям

$$p_{km} \geq 0, \quad \frac{\partial p_{km}}{\partial \mathbf{D}} \leq 0, \quad q_{km} \geq 0, \quad \frac{\partial q_{km}}{\partial \mathbf{D}} \leq 0, \quad k = 2, 3, \quad m = 0, 1, 2 \quad (4.6)$$

Теперь покажем, что если справедливы неравенства (4.6), то $\partial \varphi / \partial \mathbf{D}$ является отрицательным тензором второго ранга, т.е.

$$\partial \varphi / \partial \mathbf{D} \leq 0 \quad (4.7)$$

Для того чтобы доказать неравенство (4.7), используем соотношение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{D}} = \frac{\partial f}{\partial s_k} \frac{\partial I_k}{\partial \mathbf{D}}$$

Если показать, что справедливы неравенства

$$\frac{\partial I_k}{\partial \mathbf{D}} \leq 0, \quad k = 1, \dots, 4 \quad (4.8)$$

то из условий $\frac{\partial f}{\partial s_k} \geq 0, k = 1, \dots, 4$, следует неравенство (4.7).

Заметим, что каждый из инвариантов $I_k, k = 1, \dots, 4$, можно записать с помощью функции $\kappa(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{a})$, введенной в лемме 1. А именно, справедливы равенства

$$\begin{aligned} I_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) &= \kappa(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}_1, \mathbf{I}), & I_2(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) &= \kappa(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}_1, \boldsymbol{\Lambda}), \\ I_3(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) &= \kappa(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2, \boldsymbol{\sigma}), & I_4(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) &= \kappa(\mathbf{p}_3, \mathbf{q}_3, \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Lambda}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Вычислим теперь производные (4.8), учитывая соотношения (2.9) и (4.9). Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{D}} &= \mathbf{A}(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\sigma}), & \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{D}} &= \mathbf{A}(\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Lambda}), \\ \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{D}} &= \mathbf{A}(\mathbf{p}_2, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{A}(\mathbf{q}_2, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}), & & \\ \frac{\partial I_4}{\partial \mathbf{D}} &= \mathbf{A}(\mathbf{p}_3, \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{q}_3 \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{A}(\mathbf{q}_3, \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Lambda}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Обращаем внимание, что с учетом соотношений (4.5) правые части первых двух соотношений в (4.10) равны нулю, а при ограничениях (4.6) правые части двух последних соотношений в (4.10) являются отрицательными тензорами второго ранга, следовательно, неравенства (4.8) выполнены. Это доказывает неравенство (4.7).

Заметим, что если не накладывать ограничение (4.5), то для того, чтобы продолжать исследование модели, необходимо задавать вид зависимости $\mathbf{p}_1(\mathbf{D})$ и $\mathbf{q}_1(\mathbf{D})$ для конкретного материала.

5. Преобразование определяющих соотношений. Если исключить λ, \mathbf{e}' и \mathbf{e}'' из определяющих соотношений, то приходим к представлению $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ как функции $\boldsymbol{\varepsilon}, \theta, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}$ и к представлению $d\boldsymbol{\sigma}/dt$ как функции $\boldsymbol{\sigma}, \theta, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}$. Рассмотрим случай, когда тензор \mathbf{e}'' не равен нулю, так как в противном случае определяющие соотношения сводятся к соотношениям теории упругости. Из представления удельной свободной энергии (1.7) и первого равенства в (1.5) имеем

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\beta}\theta + \boldsymbol{\sigma}_0$$

Дифференцируя это равенство по времени, приходим к соотношению

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \mathbf{c} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} + \frac{d\mathbf{c}}{dt} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{d\boldsymbol{\sigma}_0}{dt} + \frac{d(\boldsymbol{\beta}\theta)}{dt}$$

С другой стороны, исключая величины \mathbf{e}' и \mathbf{e}'' из соотношений (1.1), (1.2), (3.3), получим

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} = \mathbf{e} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

Исключая величины λ и $d\boldsymbol{\sigma}/dt$ от последних двух равенств и первого соотношения в (3.7), получим уравнение для $d\boldsymbol{\varepsilon}/dt$:

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} = \tilde{\mathbf{e}} + \left(\mathbf{c} \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{1}{\varphi^p}, \quad (5.1)$$

где $\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{e} + \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\beta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\Sigma} + \varphi^p \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{1}{\varphi^p}$, $\boldsymbol{\Sigma} = \frac{d\mathbf{c}}{dt} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{d\boldsymbol{\sigma}_0}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} \theta$

Теперь получим уравнение для $d\boldsymbol{\sigma}/dt$. Из представления потенциала Гиббса (1.8) и первого из соотношений в (1.6) имеем

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{a}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0) - \theta \boldsymbol{\alpha}$$

Дифференцируя это соотношение по времени, приходим к равенству

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} = \mathbf{a} \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} + \frac{d\mathbf{a}}{dt} \boldsymbol{\sigma} - \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_0}{dt} - \frac{d(\boldsymbol{\alpha}\theta)}{dt}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}_0$. Исключая величины $d\boldsymbol{\varepsilon}/dt, \mathbf{e}', \mathbf{e}''$ из соотношений (1.1), (1.2), (3.3) и последнего равенства, получим

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \mathbf{c} \left(\mathbf{e} + \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_0}{dt} - \frac{d\mathbf{a}}{dt} \boldsymbol{\sigma} + \frac{d(\boldsymbol{\alpha}\theta)}{dt} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)$$

Подставляя в это равенство вместо λ правую часть первого равенства в (3.7), приходим к уравнению

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \mathbf{c} \left(\hat{\mathbf{e}} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{1}{\varphi^p} \right) \quad (5.2)$$

где $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{e} + \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_0}{dt} - \frac{d\mathbf{a}}{dt} \boldsymbol{\sigma} + \frac{d(\boldsymbol{\alpha}\theta)}{dt} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \varphi^p \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{1}{\varphi^p}$.

Разрешим уравнение (5.1) относительно тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}/dt$, а уравнение (5.2) – относительно тензора $d\boldsymbol{\sigma}/dt$. Для этого введем обозначения, полагая

$$\mathbf{X} = \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt}, \quad \mathbf{P} = \tilde{\mathbf{e}}, \quad \mathbf{Q} = \frac{1}{\varphi^p} \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{c} \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (5.3)$$

когда рассматриваем уравнение (5.1), и

$$\mathbf{X} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{c}\hat{\mathbf{e}}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{c} \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \mathbf{R} = \frac{1}{\varphi^p} \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (5.4)$$

когда рассматриваем уравнение (5.2). Тогда (5.1) и (5.2) можно записать в виде следующей системы линейных алгебраических уравнений относительно вектора \mathbf{X}

$$\mathbf{X} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{X}) \quad (5.5)$$

Обозначим через ∇ определитель системы (5.5). Тогда имеем

$$\nabla = 1 - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} = 1 - \left(\mathbf{c} \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \frac{1}{\varphi^p}$$

Так как справедливо неравенство (3.8), то второе слагаемое в правой части этого равенства положительно. Отсюда следует, что определитель ∇ отличен от нуля, а система (5.5) имеет единственное решение

$$\mathbf{X} = \mathbf{P} + \frac{\mathbf{Q} \otimes \mathbf{R}}{1 - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}} \mathbf{P}$$

Подставляя в последнее равенство вместо $\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ правые части соотношений (5.3) и (5.4) соответственно, придем к уравнениям

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{e}}, \quad \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{e}} \quad (5.6)$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{\Pi} + K \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \mathbf{c} \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)$, $\mathbf{A} = \mathbf{c}\mathbf{B}$, $K = 1 / \left(\varphi^p - \mathbf{c} \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)$, $(\mathbf{c}\mathbf{B})_{ijmn} = c_{ijpq} B_{pqmn}$

Покажем, что тензор \mathbf{A} положительно определен. Для этого введем $\mathbf{b} = \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} / \sqrt{|\varphi^p|}$. Так как справедливо неравенство (3.8), то \mathbf{A} можно переписать в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{c} - (\mathbf{c}\mathbf{b} \otimes \mathbf{c}\mathbf{b}) / (1 + \mathbf{c}\mathbf{b} : \mathbf{b})$$

Так как \mathbf{c} – положительно определенный тензор, то используя неравенство Шварца, получим

$$(\mathbf{cb} \otimes \mathbf{cb})\mathbf{x} : \mathbf{x} = (\mathbf{cb} : \mathbf{x})^2 \leq (\mathbf{cb} : \mathbf{b})(\mathbf{cx} : \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{M}$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} : \mathbf{x} &= \mathbf{cx} : \mathbf{x} - \frac{1}{1 + \mathbf{cb} : \mathbf{b}} (\mathbf{cb} \otimes \mathbf{cb})\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{cx} : \mathbf{x} - \\ & - \frac{(\mathbf{cb} : \mathbf{b})(\mathbf{cx} : \mathbf{x})}{1 + \mathbf{cb} : \mathbf{b}} = (\mathbf{cx} : \mathbf{x}) \left(1 - \frac{\mathbf{cb} : \mathbf{b}}{1 + \mathbf{cb} : \mathbf{b}} \right) \end{aligned}$$

Так как оба множителя в правой части последнего соотношения положительны, приходим к выводу, что \mathbf{A} положительно определен.

Вернемся к уравнению (1.4) и рассмотрим тепловой поток \mathbf{q} . В общем случае \mathbf{q} зависит от параметров состояния и градиента температуры $\nabla\theta$. Мы предполагаем, что $\nabla\theta$ достаточно мал. Тогда мы можем предположить, что справедливо известное соотношение $\mathbf{q} = -\boldsymbol{\pi} \cdot \nabla\theta$, где $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}(\mathbf{D})$ – тензор теплопроводности. Так как считается, что в исходном состоянии свойства среды аналогичны свойствам линейно упругой трансверсально–изотропной среде, то тензор $\boldsymbol{\pi}(0)$ должен иметь вид

$$\boldsymbol{\pi}(0) = \text{diag}(\pi_1, \pi_1, \pi_2) = \pi_1 \mathbf{I} + (\pi_2 - \pi_1) \boldsymbol{\Lambda} = \pi_2 \mathbf{I} + (\pi_1 - \pi_2) (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Lambda}),$$

$$\pi_1 \neq \pi_2, \pi_1 > 0, \pi_2 > 0$$

Заметим, что тензор $\mathbf{I} - \boldsymbol{\Lambda}$ неотрицателен и удовлетворяет соотношению

$$(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Lambda}) \cdot (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{I} - \boldsymbol{\Lambda}$$

Положим

$$\boldsymbol{\pi} = \pi_1 \mathbf{p} + (\pi_2 - \pi_1) \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\Lambda}$$

для $\pi_1 \leq \pi_2$, и

$$\boldsymbol{\pi} = \pi_2 \mathbf{p} + (\pi_1 - \pi_2) (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Lambda}) \cdot \mathbf{q} \cdot (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Lambda})$$

для $\pi_1 > \pi_2$, где, как и в предыдущем разделе, функции $\mathbf{p}(\mathbf{D})$, $\mathbf{q}(\mathbf{D})$ определяются по формулам

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{D}) = p_m \mathbf{h}^m, \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{D}) = q_m \mathbf{h}^m, \quad \mathbf{p}(0) = \mathbf{q}(0) = \mathbf{I},$$

$$p_m = p_m(\mathbf{D}) \geq 0, \quad q_m = q_m(\mathbf{D}) \geq 0, \quad \sum p_m^2 \neq 0, \quad \sum q_m^2 \neq 0 \quad (5.7)$$

Из условий (5.7) следует, что $\mathbf{p} > 0, \mathbf{q} > 0$. А тогда справедливы неравенства $\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{q} \cdot \mathbf{\Lambda} > 0$ и $(\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}) \cdot \mathbf{q} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}) > 0$. Поэтому как в первом, так и во втором случае справедливо $\boldsymbol{\pi} > 0$.

Преобразуем уравнение (1.4). Рассмотрим случай, когда в качестве параметров состояния используются $\boldsymbol{\varepsilon}, \theta, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}$. Тогда из соотношений (1.5), (3.3), (3.7) имеем

$$s = -(s_0 + \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\varepsilon} + u_\varepsilon \theta) / \rho,$$

$$\mathbf{e}'' = -\frac{1}{\varphi^p} \left(\mathbf{c} \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\beta} \right) \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \Sigma + \zeta \varphi^D \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

Подставим выражения для s и \mathbf{e}'' соответственно в левую и правую часть уравнения (1.4). Тогда после преобразований получим

$$(\rho c_\varepsilon + \lambda_\varepsilon) \frac{d\theta}{dt} + (\boldsymbol{\beta}_1 - T_0 \boldsymbol{\beta}) : \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\pi} \nabla \theta) - q_\varepsilon \quad (5.8)$$

Аналогично, когда $\boldsymbol{\sigma}, \theta, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}$ используются в качестве параметров состояния, придем к уравнению

$$(\rho c_\sigma + \lambda_\sigma) \frac{d\theta}{dt} + (\boldsymbol{\alpha}_1 - T_0 \boldsymbol{\alpha}) : \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\pi} \nabla \theta) - q_\sigma \quad (5.9)$$

В уравнениях (5.8), (5.9) величины $\lambda_\varepsilon, \lambda_\sigma, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_1, q_\varepsilon, q_\sigma, c_\sigma$ определяются следующим образом:

$$\lambda_\varepsilon = L \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\beta} \right), \quad \lambda_\sigma = L \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad \boldsymbol{\beta}_1 = \left(\mathbf{c} \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \boldsymbol{\sigma} / \varphi^p,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \boldsymbol{\sigma} / \varphi^p, \quad q_\varepsilon = T_0 \rho \frac{\partial s(\boldsymbol{\varepsilon}, \dots)}{\partial \mathbf{D}} : \mathbf{f}_D + L \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \Sigma + \zeta \varphi^D \right) + \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{D}} : \mathbf{f}_D,$$

$$q_\sigma = T_0 \rho \frac{\partial s(\boldsymbol{\sigma}, \dots)}{\partial \mathbf{D}} : \mathbf{f}_D + L \zeta \varphi^D + \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{D}} : \mathbf{f}_D, \quad L = \frac{1}{\varphi^p} \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\sigma}, \quad c_\sigma = T \frac{\partial s}{\partial T}(\boldsymbol{\sigma}, \theta, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D})$$

Обращаем внимание на то, что первые слагаемые в определениях величин q_ε и q_σ не равны друг другу, так как в первом случае производная $\partial s / \partial \mathbf{D}$ вычисляется при постоянных $\boldsymbol{\varepsilon}$ и θ , а во втором – при постоянных $\boldsymbol{\sigma}$ и θ . Заметим, что параметр c_σ связан с u_σ соотношением $u_\sigma = -\rho c_\sigma / T_0$ а тензоры $\boldsymbol{\alpha}_1$ и $\boldsymbol{\beta}_1$ – соотношением $\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{a} \boldsymbol{\beta}_1$.

Добавляя к уравнениям (5.8), (2.11), (3.1) и первому уравнению в (5.6) уравнения движения Коши (см. [22]), получим полную систему дифференциальных уравнений с частными производным относительно скорости \mathbf{v} и параметров состояния $\boldsymbol{\varepsilon}, \theta, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}$, которая является математической

моделью процессов деформирования упрочняющихся упругопластических сред с тензорным параметром повреждаемости. Аналогичную систему уравнений можно получить и для параметров состояния $\boldsymbol{\sigma}, \theta, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{D}$. Для этого нужно использовать уравнение (5.9) вместо (5.8) и второе уравнение в (5.6).

6. Гиперболичность полной системы. Ограничимся случаем изотермических процессов и принимаем в качестве неизвестных переменных величины $\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha}$. Рассматривая $\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}$ как векторы–столбцы, а именно

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T, \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12})^T, \mathbf{D} = (D_{11}, D_{22}, D_{33}, D_{23}, D_{31}, D_{12})^T$$

запишем систему уравнений с частными производными относительно $\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha}$ как в тензорных, так и в матричных обозначениях:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (6.1a) \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_m \partial_m \boldsymbol{\sigma} + \dots \quad (6.1)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \left(\mathbf{c} + K \left(\mathbf{c} \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \mathbf{c} \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \right) (\mathbf{e} + \dots) \quad (6.2a) \quad \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \mathbf{G}_m \partial_m \mathbf{v} + \dots \quad (6.2)$$

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} + \dots \right) \hat{f}_D \quad (6.3a) \quad \frac{d\mathbf{D}}{dt} = \mathfrak{F} \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} + \dots \quad (6.3)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\sigma} \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} + \dots \right) \hat{\chi} \quad (6.4a) \quad \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \mathfrak{E} \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} + \dots \quad (6.4)$$

где многоточиями обозначены слагаемые, которые не содержат первых производных $\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha}$, $\hat{f}_D = -\mathbf{f}_D(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}, \partial \varphi / \partial \boldsymbol{\sigma}) / \varphi^p$, $\hat{\chi} = -\chi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}, \partial \varphi / \partial \boldsymbol{\sigma}) / \varphi^p$

Величины $\mathbf{F}_m, \mathbf{G}_m, m = 1, 2, 3, \mathfrak{F}, \mathfrak{E}$ являются $3 \times 6, 6 \times 3, 6 \times 6, 1 \times 6$ –матрицами, соответственно.

Покажем, что система уравнений (6.1) – (6.4) – гиперболическая (см. [23]). Пусть $\lambda, \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Обозначив характеристическую матрицу этой системы через $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\lambda, \boldsymbol{\xi})$, имеем

$$\mathbf{M}(\lambda, \boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} -\lambda \mathbf{E}_3 & \xi_m \mathbf{F}_m & 0 & 0 \\ \xi_m \mathbf{G}_m & -\lambda \mathbf{E}_6 & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{F} & -\lambda \mathbf{E}_6 & 0 \\ 0 & \mathfrak{E} & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad m = 1, 2, 3$$

где \mathbf{E}_3 и \mathbf{E}_6 – единичные 3×3 и 6×6 –матрицы.

Уравнение (6.3) соответствует уравнению (2.11). Для сред, у которых тензор $d\mathbf{D}/dt$ удовлетворяет уравнению (2.13), матрицу \mathfrak{F} в (6.3) следует положить равной нулю.

Теперь покажем, что уравнение $\det \mathbf{M}(\lambda, \xi) = 0$ имеет только действительные корни $\lambda_m = \lambda_m(\xi) \forall \xi \in \mathbb{R}^3, m = 1, \dots, 16$, а размерность пространства собственных векторов, соответствующих корню λ_m , равна кратности λ_m .

Введем для упрощения записи матрицы $\mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{S}$

$$\mathbf{P} = \xi_m \mathbf{F}_m, \mathbf{R} = \xi_m \mathbf{G}_m, \mathbf{S} = \mathbf{P}\mathbf{R} = \xi_m \xi_n \mathbf{F}_m \mathbf{G}_n \quad (6.5)$$

и обозначим через \mathbf{Q} минор, полученный вычеркиванием последних двух строк и столбцов матрицы \mathbf{M} . Очевидно равенство

$$\det \mathbf{M} = \lambda^7 \det \mathbf{Q}$$

Поэтому ненулевые корни матрицы \mathbf{M} совпадают с корнями уравнения

$$\det \mathbf{Q} = 0 \quad (6.6)$$

Покажем, что уравнение (6.6) имеет только действительные корни, если $\xi \in \mathbb{R}^3$. Для этого введем матрицу \mathbf{L}

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_3 & \frac{1}{\lambda} \mathbf{P} \\ 0 & \mathbf{E}_6 \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 0$$

Умножим матрицу \mathbf{Q} слева на \mathbf{L} . Тогда получим

$$\mathbf{L}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda \mathbf{E}_3 + \frac{1}{\lambda} \mathbf{P}\mathbf{R} & \mathbf{E}_3 \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{E}_6 \\ \mathbf{R} & -\lambda \mathbf{E}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \mathbf{E}_3 + \frac{1}{\lambda} \mathbf{S} & 0 \\ \mathbf{R} & -\lambda \mathbf{E}_6 \end{pmatrix}$$

Так как матрица \mathbf{L} невырожденная, то из последнего соотношения следует, что ненулевые корни уравнения (6.6) являются корнями уравнения

$$\det(-\lambda^2 \mathbf{E}_3 + \mathbf{S}(\xi)) = 0$$

Покажем, что матрица $\mathbf{S}(\xi)$ симметрична и положительно определена, откуда будет следовать, что корни последнего уравнения и, следовательно, уравнения (6.6), вещественны и положительны. Более того, как следует из симметрии $\mathbf{S}(\xi)$, размерность подпространства порожденного собственными векторами, соответствующими определенному собственному значе-

нию λ , равна кратности λ , то есть, λ – полупростое собственное значение.

Для того чтобы доказать это утверждение, проверим справедливость равенства

$$(\mathbf{F}_m \mathbf{G}_n)_{ij} = A_{imjn} \quad (6.7)$$

где тензор \mathbf{A} определен в (5.6). Продифференцируем уравнения (6.1а), (6.1) по времени и получим

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{v}}{dt^2} = (A_{minj} \partial_m \partial_n v_j) + \dots = \mathbf{F}_m \mathbf{G}_n \partial_m \partial_n \mathbf{v} + \dots, \quad i = 1, 2, 3,$$

где многоточиями обозначены слагаемые, которые не содержат вторых производных функции \mathbf{v} . Далее, приравнявая члены с одинаковыми вторыми производными слева и справа в последнем равенстве, придем к равенству (6.7). Теперь, используя (6.7), получим

$$S_{ij}(\xi) = \xi_m \xi_n (\mathbf{F}_m \mathbf{G}_n)_{ij} = \xi_m \xi_n A_{imjn} = \xi_n \xi_m A_{jnim} = S_{ji}(\xi)$$

и так как тензор \mathbf{A} положительно определен, имеем

$$\mathbf{S}(\xi) \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta} = A_{imjn} \xi_m \xi_n \eta_i \eta_j = \frac{1}{4} \mathbf{A}(\boldsymbol{\eta} \otimes \xi)_s : (\boldsymbol{\eta} \otimes \xi)_s > 0$$

где индекс s обозначает операцию симметризации $\boldsymbol{\eta} \otimes \xi$.

Из последнего неравенства следует, что собственные значения матрицы \mathbf{M} вещественны и положительны. Более того, можно показать, что матрица \mathbf{M} диагонализируема, т. е. пространство \mathbb{R}^{16} порождается всеми собственными векторами \mathbf{M} (см., например, [10]). Эти свойства матрицы \mathbf{M} означает, что система (6.1а)–(6.4а) является гиперболической.

Если к системе уравнений (6.1а)–(6.4а) добавить уравнение (5.9), описывающее процесс передачи тепла, то расширенная система уже не будет гиперболической, так как уравнение (5.9) является дифференциальным уравнением второго порядка по пространственным переменным.

Если коэффициент при производной приращения температуры по времени в уравнении (5.9) положителен, то (5.9) является уравнением параболического типа, причем θ рассматривается как неизвестная функция, а величины $\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}$ считаются постоянными.

В этом случае задача Коши для расширенной системы будет корректно поставленной, если система (6.1а)–(6.4а) гиперболична. Этот факт доказывается методом последовательных приближений: а именно, предполагаем, что $\theta_n, \mathbf{v}_n, \boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n, \mathbf{D}_n$ известны на шаге n . Затем $\mathbf{v}_{n+1}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \mathbf{D}_{n+1}$ определяются из решения (6.1)–(6.4) при $\theta = \theta_n$ на шаге $n+1$, и θ_{n+1} определяется из решения (5.9) при $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{n+1}, \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \mathbf{D} = \mathbf{D}_{n+1}$.

Из сказанного выше следует, что на определяющие соотношения должно быть наложено еще одно условие $\rho c_\sigma + \lambda_\sigma > 0 \quad \forall t, 0 \leq t < \infty$. Отметим, что это условие вовсе не связано с накоплением (или отсутствием накопления) повреждений при деформировании среды.

То, что собственные векторы характеристической матрицы образуют базис в \mathbb{R}^{16} , имеет большое значение для построения численных методов решения смешанных задач. А именно, возьмем какую-нибудь точку $P(t^0, x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ в пространстве переменных t, x_1, x_2, x_3 и пусть функция $\varphi = \varphi(t, x_1, x_2, x_3)$ задает характеристическую поверхность, проходящую через точку P . Найдем собственные векторы характеристической матрицы

$$\mathbf{M} = \mathbf{M} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right)$$

Тогда, умножая систему уравнений (6.1)–(6.4) последовательно на каждый собственный вектор матрицы \mathbf{M} , получим систему так называемых характеристических соотношений. Достоинства характеристических соотношений заключаются в том, что они содержат операторы дифференцирования только по направлениям, касательным к характеристической поверхности. Выбором пространственных координат можно добиться того, что один из операторов дифференцирования совпадет с производной по бихарактеристике (см. определение [24]). Это свойство может быть использовано для построения приближенного решения в граничных точках с точностью, сравнимой с точностью схемы Макормака, используемой для вычислений во внутренних точках. Подробные сведения об алгоритме, использующем для вычислений во внутренних точках схему Макормака, а для вычислений в граничных точках характеристические соотношения, приведены в [25]. Плодотворность подхода к решению нестационарных задач, основанного на данном алгоритме, подтверждается результатами работ [3] и [26]. Отметим, что для гиперболических систем с одной пространственной переменной описанная процедура известна как метод характеристик.

Показано, что система уравнений, описывающих движение среды при $T = const$, является гиперболической в любой точке среды, независимо от физического состояния (упругость, пластичность, накопление повреждений). Однако, опираясь на этот факт, нельзя утверждать, что задача Коши является корректно поставленной. Дело в том, что граница между областями различного физического состояния, вообще говоря, заранее не известна, и может изменяться со временем. Чтобы обойти эту трудность, для доказательства корректности задачи Коши применяются

различные методы регуляризации, например, заменяют ассоциированный закон пластического течения вариационным неравенством, или формулируют задачу на основе энергетического подхода.

Тем не менее, можно сделать вывод, что предложенная модель непротиворечива, поскольку она не нарушает второго начала термодинамики и при условии $T = const$ сводится к гиперболической системе дифференциальных уравнений (6.1a)–(6.4a). Есть все основания полагать, что на основе идей [10] удастся построить непротиворечивую модель упругопластической среды с тензорным параметром повреждаемости, которая в исходном состоянии ведет себя аналогично упругой ортотропной среде.

Литература

1. Ильюшин А. А. Об одной теории длительной прочности // Инж. журнал МТТ. 1967. № 3. С. 21–35.
2. Вакуленко А.А., Качанов М.Л. Континуальная теория среды с трещинами // Изв. АН СССР МТТ. 1971. № 4. С. 159–166.
3. Глушко А. И., Нещеретов И. И. О кинетическом подходе к разрушению горных пород // Изв. АН СССР МТТ. 1986. № 6. С. 140–146.
4. Lemaitre J., Desmorat R., Souzay M. Anisotropic damage law of evolution // Europ. J. Mech. Ser. A. 2000. V. 19. № 2. P. 187–208.
5. Stoffel M. Experimental validation of anisotropic ductile damage and failure of shock wave-loaded plates // Europ. J. Mech. Ser. A. 2007. V. 26. № 4. P. 592–608.
6. Мураками С., Радаев Ю. Н. Математическая модель трехмерного анизотропного состояния поврежденности // Изв. РАН МТТ. 1996. № 4. С. 93–110.
7. Besson, J., Cailletaud, G., Chaboche, J.-L., Forest, S. Non-Linear Mechanics of Materials. Springer-Verlag. 2010. 433 p.
8. Lemaître, J., Chaboche, J.-L. Mechanics of Solid Materials. Cambridge Univ Press. 1994. 582 p.
9. Voyiadjis, G. Z., Kattan, P. I. Damage Mechanics. CRC Press. 2005. 270 p.
10. Глушко А. И., Нещеретов И. И. О модели упругопластических упрочняющихся сред с тензорным параметром повреждаемости // ПММ. 2010. Т. 74, вып. 3. С. 349–364.
11. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра: Учебник для вузов. М.: Физматлит. 2000. 368 с.
12. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.

13. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. М.: Физматлит. 1988. 192 с.
14. Coleman B. D., Noll W. Material Symmetry and thermoelastic inequalities in finite elastic deformation // Archiv for Rational Mech. and Analysis. 1964. V. 14. N 2. P. 87–111.
15. C. Truesdell, W. Noll. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 2003. 603 p.
16. Лохин В. В., Седов Л. И. Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов / /Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука. Т.1. 1970. С. 436–464.
17. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука. 1966. 576 с.
18. Lax, P. D. Linear Algebra and Its Applications, sec. ed., Wiley-Interscience, New York. 2007. 376 p.
19. Moreau J. J. Sur le lois de frottement, de plasticité et de viscosité // C. r. Acad. sci. Ser. A et B. 1970. Т. 271. № 13. P. A608–A611.
20. Boehler, J.-P. 1978. Lois de comportement anisotropie des milieux continus // J. Mech., 17. P. 153–190.
21. Rockafellar, R. T. Convex analysis. Princeton university press, Princeton. 1970. 468 p. = Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М., Мир. 1973. 470 с.
22. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М., Наука. 1980. 512 с.
23. Benzoni-Gavage S., Serre D. Multidimensional Hyperbolic Partial Differential Equations First-order Systems and Applications. Clarendon press, Oxford. 2007. 508 p.
24. Математическая энциклопедия. М.: Сов. Энциклопедия. Том 1, 1977. 1140 с.
25. Глушко А. И., Нещеретов И. И. Об одном численном методе решения смешанных задач для гиперболических систем уравнений на нерегулярной сетке // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001 г. Т. 41. № 1. С. 114–125.
26. Глушко А. И., Нещеретов И. И. О поведении решения задач дифракции продольной волны на цилиндрической полости при больших временах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31. № 7. С. 1020–1028.

Комментарии

1. Статья «О моделях анизотропных упругопластических сред с тензорным параметром повреждаемости» опубликована в журнале «Журнал вычислительной математики и математической физики», 2012, том 52, № 12. С. 2260–2283; поступила в редакцию 17.05.2012. Авторы – А. И. Глушко, И. И. Нещеретов.

2. Группа симметрии сплошной среды была определена в п. 1 формально, поэтому остановимся на мотивах определения. Для простоты рассмотрим случай $m = 2, n = 1$, т. е. функция реакции зависит от градиента деформаций и одного тензора второго ранга \mathbf{A} . Напомним сначала, как вводится понятие группы симметрии Ноллом в теории упругости. Для этого рассмотрим две локальные отсчетные конфигурации σ и σ' и обозначим градиент деформаций относительно конфигурации σ через \mathbf{F} , а относительно конфигурации σ' через \mathbf{F}' , и пусть \mathbf{G} – градиент деформаций конфигурации σ' относительно конфигурации σ . Тогда между этими величинами справедливо соотношение

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}'\mathbf{G} \quad \langle 1 \rangle$$

Обозначим g_σ и g'_σ функции реакций относительно конфигураций σ и σ' , соответственно. Тогда из определения «функция реакции» следует соотношение

$$g_\sigma(\mathbf{F}) = g'_\sigma(\mathbf{F}') \quad \langle 2 \rangle$$

Предположим теперь, что для любых значений \mathbf{F}' справедливо соотношение

$$g_\sigma(\mathbf{F}') = g'_\sigma(\mathbf{F}') \quad \langle 3 \rangle$$

Тогда из цепочки соотношений $\langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 1 \rangle$ придет к равенству

$$g_\sigma(\mathbf{F}) = g_\sigma(\mathbf{F}\mathbf{G}^{-1}) \quad \langle 4 \rangle$$

Далее, следуя Ноллу, можно показать, что множество всех \mathbf{G} , удовлетворяющих $\langle 4 \rangle$, образуют группу, в которой групповой операцией является умножение матриц.

Пусть теперь функция реакции зависит еще и от \mathbf{A} . Предположим, что матрицы коэффициентов \mathbf{a} и \mathbf{a}' тензора \mathbf{A} относительно конфигураций σ и σ' связаны соотношением

$$\mathbf{a}' = \mathbf{G}\mathbf{a}\mathbf{G}^T$$

Здесь \mathbf{G} имеет тот же смысл, что и в определении группы симметрии, данным Ноллом. Тогда по аналогии с теорией упругости придет к соотношению

$$g_\sigma(\mathbf{F}) = g_\sigma(\mathbf{F}\mathbf{G}^T, \mathbf{G}\mathbf{a}\mathbf{G}^T) \quad \langle 5 \rangle$$

вместо соотношения $\langle 4 \rangle$. Откуда следует, что множество всех \mathbf{G} , удовлетворяющих $\langle 5 \rangle$, образуют группу. Но правая часть $\langle 5 \rangle$ с точностью до обозначений совпадает с правой частью в определении группы симметрии в пункте 1 при $m = 2, n = 1$.

3. Выше приведена ссылка на работу [13], поскольку в ней дано представление тензора линейно упругой трансверсально-изотропной среды \hat{c} . Определение группы симметрии в [13] не сформулировано. Однако преобразования, которые приводятся в указанной монографии, совпадают с теми, что предписаны определением группы симметрии тензора четвертого ранга (см., например, [12]).

В разделе «Нелинейная упругость» [13] дано представление свободной энергии для нелинейной упругой трансверсально-изотропной среды. Если сравнить это представление с представлением из [22], то можно сделать вывод о том, что при согласовании обозначений оба этих представления совпадают. Заметим, что в [22] дается определение группы симметрии определяющего соотношения, использующее неудачный термин «группа равноправности материала». С легкой руки Лурье этот термин попал в переводы монографий Трусделла {1} и Сьярле {2}, хотя в первоисточниках слово «равноправность» отсутствует.

Следует также подчеркнуть, что с формальной точки зрения данное В. Ноллом [14] определение группы симметрии определяющего соотношения отличается от определения группы симметрии тензора четвертого ранга. Однако для линейно упругих сред какое бы из двух определений ни взять, придем к одному и тому же результату.

1. Truesdell C. A first course in rational continuum mechanics. Baltimore: The Johns Hopkins University. 1972. 304 p. = Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир. 1975. 592 с.

2. См. [11] в главе 13.

Глава 13. Модель упругой среды с ограничениями нормальных компонент вектора напряжений

При строительстве зданий и сооружений издавна широко применяются конструкции из каменной или кирпичной кладки. Важным элементом кладки является тонкий слой раствора, связующего между собой камни или кирпичи. Кирпичи (камни) могут выдерживать большие сжимающие напряжения (нагрузки), а разрушаются при существенно меньших растягивающих напряжениях (нагрузках). Поведение кирпичей (камней) можно описать моделью упругого тела, тогда как поведение скрепляющего слоя раствора существенно отличается от линейного.

В настоящее время проектирование и возведение типовых зданий и сооружений с конструкциями из каменной или кирпичной кладки выполняются по стандартизованным процедурам [1]. Наряду с современными зданиями и сооружениями существует множество исторических зданий и сооружений с конструкциями из каменной или кирпичной кладки. Практически все широко известные памятники культуры являются зданиями и сооружениями с конструкциями из каменной или кирпичной кладки (смотри, например, [2]). Ясно, что для оценивания несущей способности строительных конструкций таких объектов, необходимого для проведения реставрационных работ, вышеупомянутые стандартизованные процедуры не применимы.

Если принять во внимание «почти периодическую» геометрическую структуру кирпичной кладки, то становится ясно, что поля перемещений и напряжений в таких конструкциях быстро осциллируют. В таких ситуациях в физике вместо истинных перемещений и напряжений принято рассматривать осредненные величины, для которых тем или иным способом выводится определяющее соотношение математической модели.

В конце прошлого века возник подход к решению задач об оценке напряженно-деформируемого состояния материалов конструкций из каменной или кирпичной кладки исторических зданий и сооружений, основанный на рассмотрении поведения некой осредненной среды вместо рассмотрения поведения отдельно кирпичей и раствора. Именно определяющее соотношение математической модели такой осредненной среды является предметом исследования настоящей работы.

Для того, чтобы сравнить предлагаемый подход к построению определяющего соотношения с результатами других авторов, рассмотрим основные постулаты, принятые этими авторами.

Первый постулат состоит в том, что деформации являются малыми.

Второй и ключевой постулат состоит в том, что тензор напряжений Коши σ только неположителен. Другими словами, множество допустимых значений тензора σ представляет собой замкнутый выпуклый конус K в множестве всех симметричных тензоров второго ранга.

Третий постулат состоит в том, что линеаризованный тензор деформаций e раскладывается на два слагаемых: одно из них линейно зависит от тензора σ и интерпретируется как «упругая часть тензора деформаций», второе слагаемое, в зависимости от физической интерпретации, определяется авторами по-разному. Заметим, что идея разложения тензора e содержалась еще в работе [3].

В [4] второе слагаемое ассоциируется с реакцией материала на ограничение $\sigma \leq 0$; назовем это слагаемое тензором реакции и обозначим через ξ . Согласно [4] тензор ξ принадлежит нормальному конусу $N_K(\sigma)$ к K в точке σ , то есть удовлетворяет соотношению

$$\xi \in N_K(\sigma) \triangleq \{\xi \mid \xi : (\tau - \sigma) \leq 0, \tau \leq 0\}$$

В рассматриваемом случае, а именно, когда K – конус неположительных тензоров второго ранга, для конуса $N_K(\sigma)$ справедливо представление [5, пример 6.39, с. 101]

$$N_K(\sigma) = \{\xi \mid \xi \geq 0, \xi : \sigma = 0\}$$

Воспользуемся следующим результатом из монографии [6, п. 2.16, упр. 14, с. 104]: соотношение

$$\xi : \sigma = 0, \quad \xi \geq 0, \quad \sigma \leq 0$$

эквивалентно соотношению

$$\xi \cdot \sigma = \sigma \cdot \xi = 0, \quad \xi \geq 0, \quad \sigma \leq 0$$

Тогда сформулированные выше постулаты приводят к трем эквивалентным определяющим соотношениям

$$e = a\sigma + \xi, \quad \xi : (\tau - \sigma) \leq 0, \quad \tau \leq 0$$

$$e = a\sigma + \xi, \quad \xi : \sigma = 0, \quad \xi \geq 0, \quad \sigma \leq 0$$

$$e = a\sigma + \xi, \quad \xi \cdot \sigma = \sigma \cdot \xi = 0, \quad \xi \geq 0, \quad \sigma \leq 0$$

Здесь a – полусимметричный положительный тензор четвертого ранга.

Первое определяющее соотношение приведено в работе [4], второе – в работах [7, 8]. Отметим, что при выводе второго соотношения использован известный в теории пластичности постулат Друккера.

Для важного для практики случая изотропной среды в [9] получено явное представление главных компонент тензоров σ и ξ в зависимости от упорядоченных значений главных компонент $e_k, k=1,2,3, e_1 \leq e_2 \leq e_3$, тензора e . В этом случае второе определяющее соотношение приводится в главной системе координат тензоров σ, ξ и e к линейной задаче дополнителности [10] относительно главных компонент тензоров σ, ξ , решение которой записывается в элементарных функциях. В случае анизотропной среды определяющее соотношение не приводится к задаче дополнителности. В [9] нет ответа на вопрос, как в этом случае по известным значениям тензора e вычислять значения тензора σ .

Наконец, заметим, что при сведении системы к задаче дополнителности в [9] существенным образом используется коаксильность тензоров σ, ξ и e . Но из третьего определяющего соотношения следует коаксильность тензоров σ, ξ , то есть другими словами коаксильность тензоров σ, ξ постулирована изначально в самих определяющих соотношениях. Коаксильность тензоров σ, ξ и e – тривиальное следствие соотношения $e = a\sigma + \xi$ и коаксильности тензоров σ, ξ .

Заканчивая обсуждение работ о построении определяющих соотношений для осредненных сред кирпичной кладки, следует подчеркнуть, что в основе их изложения лежит формальный аксиоматический подход. Число работ, посвященных рассматриваемой проблеме, растет год от года, причем отметим, что авторы стремятся учесть микроструктуру среды и неупругое поведение связующего элемента. Также развиваются методы численного решения конкретных задач.

Введем важное определение. Пусть среда занимает все пространство R^3 . Считаем, что при растяжении напряжения в среде положительны. Будем говорить, что среда обладает свойством односторонней ограниченности нормальных напряжений, или просто свойством ограниченности, если в каждой точке $x \in R^3$ на любой ориентированной площадке, проходящей через x , проекция вектора напряжений Коши [11] на нормаль к площадке ограничена сверху некоторой величиной $a = a(x), a \in R$.

На наш взгляд, именно это наглядное физическое свойство строительных конструкций из каменной или кирпичной кладки следует положить в качестве отправной точки при построении модели среды, а не те

или другие постулаты аксиоматического подхода. Целью работы является построение определяющего соотношения для осредненной среды типа кирпичной кладки при любых деформациях, при этом считается, что среда обладает свойством ограниченности; никакие другие физические гипотезы и принципы, кроме принципов теории упругости, в работе не используются.

В работе будет показано, что среда, обладающая свойством ограниченности нормальных напряжений, является гиперупругой, а определяющее соотношение модели среды представляет собой нелинейную зависимость между тензорами Пиолы – Киркгофа и Грина – Сен – Венана. Этому вопросу посвящены разделы 1–2. В разделах 3–5 для случая изотропной среды будет получено представление определяющего соотношения в виде элементарных тензорных функций тензорного аргумента.

В работе используются следующие соглашения. Все векторные и тензорные физические величины рассматриваются в фиксированной ортогональной системе координат $x = (x_1, x_2, x_3)$. В соответствии с опытными данными влияние температуры на поведение материала считается малым и далее не учитывается.

Приведем обозначения, которые будут использоваться ниже: $\delta_{ij}, i, j = 1, 2, 3$, – символ Кронекера, $\Delta(\mathbf{A})$ – детерминант матрицы \mathbf{A} , M – пространство симметричных тензоров второго ранга, $K \subset M, K_+ \subset M$ – замкнутые выпуклые конусы соответственно неположительных и неотрицательных тензоров с вершинами в нуле, $\mathbf{I} \in M$ – единичный тензор с компонентами δ_{ij} , $O(3)$ – группа ортогональных тензоров в R^3 , $\mathbf{\Pi}$ – единичный тензор четвертого ранга с компонентами $(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$, $j_m = j_m(\boldsymbol{\tau}), m = 1, 2, 3$, – главные инварианты тензора $\boldsymbol{\tau} \in M$, $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau}$ – свертка тензоров $\boldsymbol{\sigma} \in M$ и $\boldsymbol{\tau} \in M$ по одной и по двум парам повторяющихся индексов соответственно, λ, μ – материальные константы модели, \otimes – знак тензорного произведения. Тензор, транспонированный тензору $\mathbf{a} \in M$, обозначим через \mathbf{a}^T .

Для любого тензора четвертого ранга $\mathbf{a} = (a_{ijkl})$ и тензора второго ранга $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_{ij})$ будем обозначать через $\mathbf{a}\boldsymbol{\gamma}$ тензор второго ранга, компоненты которого определяются по формуле

$$(\mathbf{a}\boldsymbol{\gamma})_{ij} = a_{ijkl}\gamma_{kl}$$

Здесь принято правило суммирования Эйнштейна по повторяющимся парам индексов.

1. Основные предпосылки. В упругой среде, которая описывается тензорами деформаций и напряжений, а температура или энтропия не учитываются, тензор напряжений Коши $\boldsymbol{\sigma}$ в каждой точке среды однозначно определяется следующим образом [12]

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{h}(\mathbf{F}) \quad (1.1)$$

Деформация упругого тела рассматривается относительно произвольно выбранной локальной отсчетной конфигурации ω ; в соотношении (1.1) \mathbf{F} – градиент деформации относительно ω . В механике твердого деформируемого тела принято называть (1.1) определяющим соотношением, а функцию \mathbf{h} – функцией реакции, причем на множество значений функции \mathbf{h} а priori не накладывается никаких ограничений.

Если рассматривать деформацию относительно другой локальной отсчетной конфигурации ω' и обозначить через \mathbf{F}' градиент деформации относительно ω' , то определяющее соотношение (1.1) будет иметь вид

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{h}'(\mathbf{F}')$$

Здесь \mathbf{h}' – функция реакции относительно ω' .

Функции реакции \mathbf{h} и \mathbf{h}' связаны соотношением

$$\mathbf{h}'(\mathbf{F}') = \mathbf{h}(\mathbf{F}'\mathbf{K}) \quad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{K} \in M$ – градиент деформации конфигурации ω' относительно ω . Из формулы (1.2) следует, что функцию реакции \mathbf{h} достаточно построить относительно одной локальной отсчетной конфигурации η .

Поскольку ω – произвольно выбранная конфигурация, то нет никаких оснований полагать, что в ней тензор напряжений должен обращаться в нуль.

Из теоремы представления Нолла [13] следует, что определяющее соотношение, удовлетворяющее принципу объективности (который также именуется принципом материальной независимости от системы отсчета), может быть записано и в виде [11]

$$\boldsymbol{\Sigma} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{G}) \quad (1.3)$$

Здесь $\boldsymbol{\Sigma}$ – второй тензор напряжений Пиолы-Киркгофа, \mathbf{G} – тензор деформаций Коши-Грина, $\boldsymbol{\Sigma} = \Delta(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}$, $\mathbf{G} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$.

В работе будут рассматриваться однородные упругие среды, обладающие свойством ограниченности. В этом случае величина a равна

$$a(\mathbf{x}) = \beta, \quad \beta \in R$$

Учитывая определение вектора напряжений Коши, свойство ограниченности можно сформулировать в виде неравенства

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \leq \beta, \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \quad (1.4)$$

Здесь \mathbf{n} – единичный вектор. Неравенство (1.4) можно записать по другому:

$$\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \beta \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} \leq 0 \quad (1.5)$$

а также в виде

$$\mathbf{n}' \cdot (\boldsymbol{\Sigma} - \beta \Delta(\mathbf{F}) \mathbf{G}^{-1}) \cdot \mathbf{n}' \leq 0, \quad \mathbf{n}' = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{n} \quad (1.6)$$

Неравенства (1.5) и (1.6) показывают, что тензоры $\boldsymbol{\sigma} - \beta \mathbf{I}$ и $\boldsymbol{\Sigma} - \beta \Delta(\mathbf{F}) \mathbf{G}^{-1}$ неположительны, причем из неравенства

$$\boldsymbol{\Sigma} - \beta \mathbf{G}^{-1} \Delta(\mathbf{F}) \leq 0 \quad (1.7)$$

следует неравенство

$$\boldsymbol{\sigma} - \beta \mathbf{I} \leq 0$$

и наоборот.

Учитывая (1.3) и соотношение $\Delta(\mathbf{F}) = \Delta^{1/2}(\mathbf{G})$, приходим к выводу, что неравенство (1.7) будет выполнено тогда и только тогда, когда $\hat{\mathbf{T}}$ представляется в виде

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{G}) = \mathbf{T}(\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{G})) + \beta \mathbf{G}^{-1} \Delta^{1/2}(\mathbf{G}), \quad \mathbf{T}(\boldsymbol{\gamma}) \in K \quad (1.8)$$

Здесь тензор $\boldsymbol{\gamma}$ определяется следующим образом

$$\boldsymbol{\gamma} = (\mathbf{G} - \mathbf{I})/2 \quad (1.9)$$

Из соотношения (1.8) следует, что построение функции $\hat{\mathbf{T}}$ сведено к построению функции \mathbf{T} .

Очевидно, что можно построить сколько угодно функций \mathbf{T} , удовлетворяющих условию $\mathbf{T} \leq 0$. Чтобы выделить из этого множества конкретную, нужно принять во внимание и другие физические свойства рассматриваемых сред. В частности, из опытных данных известно, что рассматриваемые среды слабо сопротивляются растяжению, а при одноосном сжатии напряжения пропорциональны деформациям. Это обстоятельство наводит на мысль искать функцию \mathbf{T} в виде

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\eta}), \quad \boldsymbol{\gamma} \in M, \quad \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\gamma}) \in K_+ \quad (1.10)$$

Здесь $\mathbf{c} = (c_{kmnp})$ – тензор четвертого ранга, удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned} c_{ijmn} = c_{mnij} = c_{jimn}, \quad i, j, m, n \in \{1, 2, 3\} \\ \mathbf{c}\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau} > 0, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in M \end{aligned} \quad (1.11)$$

В соотношение (1.10) входит функция $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\gamma})$, которую необходимо определить. Для определения $\boldsymbol{\eta}$ используем вариационное неравенство

$$\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\xi} \leq 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in K_+ \quad (1.12)$$

и уравнение

$$\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\eta} = 0 \quad (1.13)$$

Вариационное неравенство (1.12) эквивалентно соотношению $\mathbf{T} \in K$. Уравнение (1.13) – дополнительное условие, которое накладывается на функцию \mathbf{T} для того, чтобы \mathbf{T} была линейной в случае, когда главные компоненты $T_k, k = 1, 2, 3$, тензора $\mathbf{T}(\boldsymbol{\gamma})$ отрицательны.

В самом деле, пусть тензор $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\gamma})$ удовлетворяет уравнению (1.13) и в некоторой точке $\boldsymbol{\gamma}$ выполняется неравенство $\mathbf{T}(\boldsymbol{\gamma}) < 0$. Запишем уравнение (1.13) в точке $\boldsymbol{\gamma}$ через компоненты тензоров $\mathbf{T}(\boldsymbol{\gamma})$ и $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\gamma})$ в главной системе координат тензора $\mathbf{T}(\boldsymbol{\gamma})$. Тогда получим

$$\sum_{k=1}^3 T_k(\boldsymbol{\gamma}) \eta_{kk}(\boldsymbol{\gamma}) = 0$$

Так как из соотношения (1.10) следует, что $\boldsymbol{\eta} \geq 0$, то последнее соотношение эквивалентно соотношению

$$T_k(\boldsymbol{\gamma}) \eta_{kk}(\boldsymbol{\gamma}) = 0, \quad T_k(\boldsymbol{\gamma}) < 0, \quad \eta_{kk}(\boldsymbol{\gamma}) \geq 0, \quad k = 1, 2, 3 \quad (1.14)$$

Из соотношения (1.14) следует, что матрица (η_{km}) компонент тензора $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\gamma})$ имеет вид

$$(\eta_{km}) = \begin{pmatrix} 0 & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{21} & 0 & \eta_{23} \\ \eta_{13} & \eta_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

Так как тензор $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\gamma})$ неотрицателен, то должны выполняться соотношения

$$\det \begin{pmatrix} 0 & \eta_{km} \\ \eta_{mk} & 0 \end{pmatrix} \geq 0, \quad k, m = 1, 2, 3, k \neq m$$

Откуда следует, что

$$\eta_{km} = 0, \quad k, m = 1, 2, 3, k \neq m \Leftrightarrow \boldsymbol{\eta} = 0 \quad (1.15)$$

При принятых предположениях из равенства (1.15) следует, что в некоторой точке $\boldsymbol{\gamma}$ функция \mathbf{T} удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{c}\boldsymbol{\gamma}$$

Обращаем внимание на то, что в доказательстве справедливости равенства (1.15) используется неравенство $\mathbf{T} < 0$, но никак не явный вид функции (1.10).

Обратим, пусть в некоторой точке γ функция \mathbf{T} удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{T}(\gamma) = c\gamma$$

Тогда из второго соотношения (1.11) следует, что

$$\boldsymbol{\eta}(\gamma) = 0$$

Из последнего равенства следует необходимость условия (1.13).

Вычтем уравнение (1.13) из неравенства (1.12). Тогда получим вариационное неравенство

$$c(\gamma - \boldsymbol{\eta}) : (\xi - \boldsymbol{\eta}) \leq 0, \quad \xi \in K_+ \quad (1.16)$$

Покажем, что справедливо следующее утверждение.

Пусть тензор $\boldsymbol{\eta}(\gamma) \in K_+$ удовлетворяет вариационному неравенству (1.16). Тогда тензор $\boldsymbol{\eta}$ должен удовлетворять вариационному неравенству (1.12) и уравнению (1.13).

Покажем, что уравнение (1.13) следует из (1.16). Для этого положим в (1.16) $\xi = 0$, а затем $\xi = 2\boldsymbol{\eta}$. Тогда получим два неравенства

$$c(\gamma - \boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\eta} \geq 0, \quad c(\gamma - \boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\eta} \leq 0$$

откуда следует (1.13). А тогда из (1.16) следует неравенство (1.12).

Таким образом, построение функции $\hat{\mathbf{T}}$ сведено к построению функции $\boldsymbol{\eta}$, удовлетворяющей вариационному неравенству (1.16).

2. Определяющее соотношение модели. В силу соотношений (1.11) вариационное неравенство (1.16) при каждом фиксированном γ имеет единственное решение $\boldsymbol{\eta}_\gamma$ [14]. Это означает, что в рамках принятых предположений функция \mathbf{T} определяется однозначно. Тензор $\boldsymbol{\eta}(\gamma)$ называется проекцией тензора γ на конус K_+ , а отображение $\gamma \rightarrow \boldsymbol{\eta}_\gamma$ обозначают через \mathbf{P}_K и называют оператором проектирования на конус K в евклидовом пространстве M , снабженным скалярным произведением $\langle \mathbf{v}, \xi \rangle$ и нормой $|\xi|$

$$\langle \mathbf{v}, \xi \rangle = c\mathbf{v} : \xi / 2, \quad |\xi| = (\langle \xi, \xi \rangle)^{1/2}, \quad \mathbf{v}, \xi \in M \quad (2.1)$$

Точка $\boldsymbol{\eta}$ является единственной точкой из K_+ , которая определяет расстояние от множества K_+ до точки γ , то есть удовлетворяет соотношению

$$|\gamma - \boldsymbol{\eta}_\gamma| = \inf |\gamma - \xi|, \quad \xi \in K_+$$

Поэтому записывают $\boldsymbol{\eta}_\gamma = \mathbf{P}_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\gamma})$. Заменяя в соотношении (1.10) $\boldsymbol{\eta}_\gamma$ на $\mathbf{P}_{\mathcal{K}_+}(\boldsymbol{\gamma})$, получим явное представление функции \mathbf{T}

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{P}_{\mathcal{K}_+}(\boldsymbol{\gamma})), \quad \boldsymbol{\gamma} \in M \quad (2.2)$$

Введем функцию $\psi = \psi(\boldsymbol{\gamma}) \in R$

$$\psi(\boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{P}_{\mathcal{K}_+}(\boldsymbol{\gamma})) : (\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{P}_{\mathcal{K}_+}(\boldsymbol{\gamma})) / 2$$

Можно показать [15], что функция ψ дифференцируема, а ее производная определяется по формуле

$$d\psi(\boldsymbol{\gamma})/d\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{P}_{\mathcal{K}_+}(\boldsymbol{\gamma})) \quad (2.3)$$

Тогда, учитывая определение (2.2), приходим к соотношению

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\gamma}) = d\psi(\boldsymbol{\gamma})/d\boldsymbol{\gamma}$$

Функцию ψ , которую принято называть потенциалом, можно также представить в виде

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{\gamma}) &= \frac{1}{2} \mathbf{c} \mathbf{P}_{\mathbf{aK}}(\boldsymbol{\gamma}) : \mathbf{P}_{\mathbf{aK}}(\boldsymbol{\gamma}) \\ \mathbf{aK} &= \{ \boldsymbol{\zeta} \mid \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{a}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma} \in K \} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $\mathbf{a} = (a_{ijmn})$ – полусимметричный положительный тензор четвертого ранга, обратный к тензору \mathbf{c} в том смысле, что выполняются равенства

$$\mathbf{a} : \mathbf{c} = \mathbf{c} : \mathbf{a} = \mathbf{I}$$

Соотношение (2.4) следует из соотношения

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{P}_{\mathcal{K}_+}(\boldsymbol{\gamma}) + \mathbf{P}_{\mathbf{aK}}(\boldsymbol{\gamma}) \quad (2.5)$$

Докажем справедливость соотношения (2.5). Из соотношений (1.10), (1.13) и неравенства $\boldsymbol{\eta} \geq 0$ имеем

$$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{a}\mathbf{T}(\boldsymbol{\gamma}) \quad (2.6)$$

$$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\gamma}) : \mathbf{T}(\boldsymbol{\gamma}) = 0 \quad (2.7)$$

$$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\gamma}) : \boldsymbol{\tau} \leq 0, \quad \boldsymbol{\tau} \in K \quad (2.8)$$

Вычитая соотношение (2.7) из (2.8) и подставляя соотношение (2.6) в полученное выражение, приходим к вариационному неравенству

$$\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{a}\mathbf{T}(\boldsymbol{\gamma})) : (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{a}\mathbf{T}(\boldsymbol{\gamma})) \leq 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{aK} \quad (2.9)$$

Вариационное неравенство (2.9) отличается от вариационного неравенства (1.16) тем, что его областью определения является конус \mathbf{aK} .

Поэтому $\mathbf{a}\mathbf{T}(\boldsymbol{\gamma})$ – единственное решение вариационного неравенства (2.9) – представляется в виде

$$\mathbf{a}\mathbf{T}(\boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{P}_{\mathbf{a}\mathbf{K}}(\boldsymbol{\gamma})$$

Следовательно $\mathbf{T}(\boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{c}\mathbf{P}_{\mathbf{a}\mathbf{K}}(\boldsymbol{\gamma})$, откуда следует соотношение (2.5).

Тензор $\boldsymbol{\gamma}$ в механике твердого деформируемого тела называется тензором Грина-Сен-Венана и обозначается через $\boldsymbol{\varepsilon}$. Воспользуемся полученными результатами, чтобы вывести определяющее соотношение, связывающее второй тензор напряжений Пиолы – Киркгофа с тензором деформаций Грина – Сен – Венана. С этой целью перепишем (1.8) с учетом (2.2) и замены тензора $\boldsymbol{\gamma}$ на $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{G}) = \mathbf{c}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{G}) - \mathbf{P}_{\mathbf{K}_*}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{G}))) + \beta \mathbf{G}^{-1} \Delta^{1/2}(\mathbf{G}) \quad (2.10)$$

С учетом (1.9) соотношение (2.10) запишется в виде

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{G}) = \bar{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{c}(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{P}_{\mathbf{K}_*}(\boldsymbol{\varepsilon})) + \beta(\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon})^{-1} \Delta^{1/2}(\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2.11)$$

Введем внутреннюю энергию $\Phi = \Phi(\boldsymbol{\varepsilon})$ по формуле

$$\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) = 2\beta \Delta^{1/2}(\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon}) + \psi(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad \boldsymbol{\varepsilon} \in M$$

Тогда, учитывая (2.3), получим

$$\frac{d\Phi(\boldsymbol{\varepsilon})}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2.12)$$

Откуда, учитывая соотношения (1.3), (2.11) и (2.12), следует

$$\boldsymbol{\Sigma} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{G}) = \bar{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{d\Phi(\boldsymbol{\varepsilon})}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.13)$$

Учитывая теорему 4.2.2 [11] соотношение (2.13) означает, что рассматриваемая среда является гиперупругой. С учетом того, что тензор $\boldsymbol{\Sigma}$ удовлетворяет условию (1.7), доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *Среда с определяющим соотношением*

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{c}(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{P}_{\mathbf{K}_*}(\boldsymbol{\varepsilon})) + \beta(\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon})^{-1} \Delta^{1/2}(\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2.14)$$

обладает свойством ограниченности и является гиперупругой.

Обращаем внимание, что соотношение (2.14) справедливо для любых анизотропных сред.

Заметим, что из соотношений (1.8), (2.11) следуют соотношения

$$\bar{\mathbf{T}}(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{h}(\mathbf{I}) \neq \mathbf{0}$$

Однако, учитывая соотношение (1.2) и свойства функции Φ , можно найти такую локальную отсчетную конфигурацию ω' ,

относительно которой функция реакции \mathbf{h}' будет удовлетворять соотношению

$$\mathbf{h}'(\mathbf{I}) = 0$$

Получим выражение для функции реакции \mathbf{h} при малых деформациях. Введем для этого градиент $\mathbf{v} = \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{x}$ вектора перемещений \mathbf{u} и линеаризованный тензор деформаций $\mathbf{e} = (\mathbf{v} + \mathbf{v}^T) / 2$. Тогда можно показать, что введенная в (1.1) функция реакции \mathbf{h} представляется в виде

$$\mathbf{h} = \mathbf{c}(\mathbf{e} - \mathbf{P}_{\kappa_+}(\mathbf{e})) + \beta \mathbf{I} + o(|\mathbf{v}|) \quad (2.15)$$

Выразим $\mathbf{\varepsilon}, \mathbf{F}$ и $\Delta^{-1}(\mathbf{F})$ через градиент \mathbf{v}

$$\mathbf{\varepsilon} = \mathbf{e} + \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{v}, \quad \Delta^{-1}(\mathbf{F}) = 1 - j_1(\mathbf{v}) + o(|\mathbf{v}|) \quad (2.16)$$

Учитывая соотношения (1.1)–(1.3) и (2.11), получим

$$\mathbf{h}(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{\varepsilon}) \cdot \mathbf{F}^T / \Delta(\mathbf{F})$$

В правую часть соотношения (2.11), определяющего функцию $\bar{\mathbf{T}}$, входит функция \mathbf{P}_{κ_+} , которая не дифференцируема в нуле, также как и функция реакции для упругих разномодульных сред [16]. Поэтому нельзя воспользоваться формулой Тейлора, чтобы получить асимптотическое разложение этой функции при $|\mathbf{v}| \rightarrow 0$. Однако, учитывая неравенство [17]

$$|\mathbf{P}_{\kappa_+}(\mathbf{\varepsilon}) - \mathbf{P}_{\kappa_+}(\mathbf{\varepsilon}')| < |\mathbf{\varepsilon} - \mathbf{\varepsilon}'|, \quad \mathbf{\varepsilon}, \mathbf{\varepsilon}' \in M$$

неравенство

$$|\mathbf{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathbf{e}(\mathbf{u})| = |\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{v}|^2$$

и соотношения (2.16), получим искомое соотношение (2.15).

3. Изотропность функции \mathbf{T} . Пусть теперь тензор \mathbf{c} является изотропным тензором четвертого ранга. Это означает, что его компоненты удовлетворяют соотношению

$$C_{ijmn} = Q_{pi} Q_{qj} Q_{rm} Q_{sn} C_{pqrs}, \quad Q = (Q_{ij}) \in O(3)$$

Можно показать [18], что изотропный тензор \mathbf{c} представляется в виде

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{\Pi}, \quad \lambda, \mu \in R \quad (3.1)$$

Покажем, что справедливо тождество

$$|\mathbf{\varepsilon}| = |Q \cdot \mathbf{\varepsilon} \cdot Q^T|, \quad Q \in O(3) \quad (3.2)$$

Действительно, по определению (2.1) имеем

$$|\boldsymbol{\varepsilon}|^2 = \frac{1}{2} \mathbf{c}\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{\Pi}) \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\lambda}{2} (\mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

Поэтому

$$|\mathcal{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{Q}^T|^2 = \frac{\lambda}{2} (\mathbf{I} : (\mathcal{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{Q}^T))^2 + \mu (\mathcal{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{Q}^T) : (\mathcal{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{Q}^T) = \frac{\lambda}{2} (\mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} = |\boldsymbol{\varepsilon}|^2$$

Учитывая тождество (3.2), имеем

$$|\mathcal{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{Q}^T - \boldsymbol{\xi}| = |\boldsymbol{\varepsilon} - \mathcal{Q}^T \cdot \boldsymbol{\xi} \cdot \mathcal{Q}|, \quad \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varepsilon} \in M, \mathcal{Q} \in O(3) \quad (3.3)$$

Воспользуемся тождеством (3.3) и докажем сначала изотропность функции $\mathbf{P}_{K_+} = \mathbf{P}_{K_+}(\boldsymbol{\varepsilon}), \boldsymbol{\varepsilon} \in M$ что означает, что \mathbf{P}_{K_+} должна удовлетворять соотношению

$$\mathbf{P}_{K_+}(\mathcal{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{Q}^T) = \mathcal{Q} \cdot \mathbf{P}_{K_+}(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathcal{Q}^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \in M, \mathcal{Q} \in O(3)$$

Действительно, из определения функции \mathbf{P}_{K_+} следует, что $\mathbf{P}_{K_+}(\boldsymbol{\varepsilon})$ – единственная точка из K_+ , в которой функция

$$\boldsymbol{\xi} \rightarrow |\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\xi}|^2, \quad \boldsymbol{\xi} \in K_+ \quad (3.4)$$

принимает минимальное значение. Тогда, учитывая (3.3), неравенство

$$|\mathcal{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{Q}^T - \mathbf{P}_{K_+}(\mathcal{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{Q}^T)|^2 \leq |\mathcal{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{Q}^T - \boldsymbol{\xi}|^2, \quad \boldsymbol{\xi} \in K_+$$

можно записать в виде

$$|\boldsymbol{\varepsilon} - \mathcal{Q}^T \cdot \mathbf{P}_{K_+}(\mathcal{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{Q}^T) \cdot \mathcal{Q}|^2 \leq |\boldsymbol{\varepsilon} - \mathcal{Q}^T \cdot \boldsymbol{\xi} \cdot \mathcal{Q}|^2, \quad \boldsymbol{\xi} \in K_+ \quad (3.5)$$

Очевидно, что $\mathcal{Q}^T \cdot \mathbf{P}_{K_+}(\mathcal{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{Q}^T) \cdot \mathcal{Q} \in K_+$, а функция $\boldsymbol{\xi} \rightarrow \mathcal{Q}^T \cdot \boldsymbol{\xi} \cdot \mathcal{Q}$ взаимно однозначно отображает K_+ на K_+ . Поэтому из неравенства (3.5) следует, что $\mathcal{Q}^T \cdot \mathbf{P}_{K_+}(\mathcal{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{Q}^T) \cdot \mathcal{Q}$ – единственная точка из K_+ , в которой функция (3.4) принимает минимальное значение. Так как такая точка обозначается через $\mathbf{P}_{K_+}(\boldsymbol{\varepsilon})$, то приходим к равенству

$$\mathcal{Q}^T \cdot \mathbf{P}_{K_+}(\mathcal{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{Q}^T) \cdot \mathcal{Q} = \mathbf{P}_{K_+}(\boldsymbol{\varepsilon})$$

которое эквивалентно равенству

$$\mathbf{P}_{K_+}(\mathcal{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{Q}^T) = \mathcal{Q} \cdot \mathbf{P}_{K_+}(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathcal{Q}^T$$

Последнее равенство означает, что функция \mathbf{P}_{K_+} изотропна.

Покажем теперь, что функция \mathbf{T} тоже изотропна, т. е. удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{T}(\mathcal{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{Q}^T) = \mathcal{Q}^T \cdot \mathbf{T}(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathcal{Q} \quad (3.6)$$

С этой целью воспользуемся представлением (3.1) и запишем (2.2) в виде

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \lambda j_1(\mathbf{s}(\boldsymbol{\varepsilon})) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{s}(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad \mathbf{s}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{P}_{K_+}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (3.7)$$

Учитывая изотропность функции P_{K_+} , легко видеть, что функция \mathbf{s} также изотропна. Откуда следует, что

$$j_1(\mathbf{s}(\mathcal{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{Q}^T)) = j_1(\mathcal{Q} \cdot \mathbf{s}(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathcal{Q}^T) = j_1(\mathbf{s}(\boldsymbol{\varepsilon})).$$

Тогда из последнего соотношения и (3.7) следует (3.6), т.е. изотропность функции \mathbf{T} .

Так как функции $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\varepsilon})$ и $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\varepsilon})$ изотропны, то, как показано в Transfer Theorem [19, p. 231] тензор $\mathbf{T}(\boldsymbol{\varepsilon})$, так же как и тензор $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\varepsilon})$, коаксиален тензору $\boldsymbol{\varepsilon}$. Откуда следует коаксиальность всех трех тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\varepsilon})$ и $\mathbf{T}(\boldsymbol{\varepsilon})$.

Обращаем внимание на то, что в анизотропном случае функция $\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ не может быть представлена в виде суперпозиции каких-то элементарных функций; значения $\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ находятся из решения задачи минимизации квадратичного функционала на конусе K_+ , принадлежащем шестимерному пространству M .

4. Представление главных компонент оператора проектирования в явном виде. Заметим, что функция $\bar{\mathbf{T}}$, определенная по формуле (2.11), будет изотропной, если тензор \mathbf{c} изотропен. Действительно, первое слагаемое в правой части (2.11) задает изотропную функцию. Из преобразования

$$(\mathbf{I} + 2(\mathcal{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathcal{Q}^T))^{-1} = (\mathcal{Q} \cdot (\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathcal{Q}^T)^{-1} = \mathcal{Q} \cdot (\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathcal{Q}^T$$

следует, что и второе слагаемое в правой части (2.11) является изотропной функцией.

Выше было показано, что тензоры $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{T}(\boldsymbol{\varepsilon})$, $\mathbf{P}_{K_+}(\boldsymbol{\varepsilon})$ – коаксиальны, если тензор \mathbf{c} изотропен. В этом случае можно получить явное представление тензора $\boldsymbol{\Sigma}$. Для этого нужно найти явное представление для $\mathbf{P}_{K_+}(\boldsymbol{\varepsilon})$, подставляя которое в формулу (2.11), получим представление для $\boldsymbol{\Sigma}$. Очевидно, что достаточно найти главные компоненты тензора $\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{P}_{K_+}(\boldsymbol{\varepsilon})$.

Далее для простоты записи опускаем индекс у тензора $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon$. Обозначим главные компоненты тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\eta}$ через $\varepsilon_k, \eta_k, k=1,2,3$, и введем функцию $\bar{E} = \bar{E}(x_1, x_2, x_3)$

$$\bar{E} = \lambda(\varepsilon_1 - x_1 + \varepsilon_2 - x_2 + \varepsilon_3 - x_3)^2 / 2 + \mu \left[(\varepsilon_1 - x_1)^2 + (\varepsilon_2 - x_2)^2 + (\varepsilon_3 - x_3)^2 \right] \quad (4.1)$$

и множество V

$$V = \{x_1, x_2, x_3 \mid x_i \geq 0, i=1,2,3\}$$

Пусть L – подпространство тензоров $\boldsymbol{\xi} \in M$, коаксиальных $\boldsymbol{\varepsilon}$. Очевидно, что в главной системе координат тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$ справедливо соотношение

$$\boldsymbol{\xi} \in K \cap L \Leftrightarrow \boldsymbol{\xi} = \text{diag}(\xi_k), \xi_k \in V, k=1,2,3 \quad (4.2)$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 2. Для изотропной среды справедливо соотношение

$$\eta_k = \bar{x}_k, \quad k=1,2,3$$

где \bar{x}_k – координаты точки минимума $\bar{\mathbf{x}}$ функции \bar{E} на множестве V .

Доказательство. Покажем сначала, что для любого тензора $\boldsymbol{\xi} \in K \cap L$ справедливо соотношение

$$|\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\xi}| = (\bar{E}(\xi_1, \xi_2, \xi_3))^{1/2} \quad (4.3)$$

Здесь $\xi_k, k=1,2,3$, – главные компоненты тензора $\boldsymbol{\xi}$.

Действительно, коаксиальность тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\xi}$ влечет соотношение

$$\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\xi} = \mathbf{P}^\top \text{diag}(\varepsilon_1 - \xi_1, \varepsilon_2 - \xi_2, \varepsilon_3 - \xi_3) \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} \in O(3) \quad (4.4)$$

Тогда, учитывая соотношение (3.2), из соотношения (4.4) получим равенство

$$|\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\xi}| = \left| \text{diag}(\varepsilon_1 - \xi_1, \varepsilon_2 - \xi_2, \varepsilon_3 - \xi_3) \right|$$

а из определения нормы, соотношений (3.1) и (4.1) получим равенство

$$\left| \text{diag}(\varepsilon_1 - \xi_1, \varepsilon_2 - \xi_2, \varepsilon_3 - \xi_3) \right| = (\bar{E}(\xi_1, \xi_2, \xi_3))^{1/2} \quad (4.5)$$

откуда следует (4.3). Покажем теперь, что справедливо соотношение

$$\bar{E}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) < \bar{E}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \xi_k \geq 0, k=1,2,3 \quad (4.6)$$

Выше отмечалось, что тензор $\boldsymbol{\eta}$ единственная точка глобального минимума функции $\boldsymbol{\xi} \rightarrow |\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\xi}|$ на множестве K , т. е. удовлетворяет неравенству

$$|\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\eta}| < |\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\xi}|, \quad \boldsymbol{\xi} \in K \quad (4.7)$$

Так как тензор $\boldsymbol{\eta}$ коаксиален тензору $\boldsymbol{\varepsilon}$, то справедливо соотношение

$$\boldsymbol{\eta} \in K \cap L \quad (4.8)$$

Поэтому последовательно учитывая соотношения (4.2), (4.8), (4.3), (4.7), (3.2) и (4.5), можно записать для любого тензора $\boldsymbol{\xi} \in K \cap L$

$$\left(\bar{E}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right)^{1/2} = |\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\eta}| < |\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\xi}| = \left|\text{diag}(\varepsilon_k - \xi_k)\right| = \left(\bar{E}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right)^{1/2}$$

Откуда следует соотношение (4.6). Это означает, что точка (η_1, η_2, η_3) – минимум функции \bar{E} на множестве V . Лемма доказана.

Получим теперь представление функции $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$ в явном виде. Поскольку функция \bar{E} выпукла и дифференцируема, точка $\bar{\mathbf{x}}$ будет точкой минимума \bar{E} на множестве V тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$\left(\partial \bar{E}(\bar{\mathbf{x}}) / \partial \mathbf{x}\right) \cdot (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{y} \in V \quad (4.9)$$

В зависимости от того, где расположена точка $\bar{\mathbf{x}}$, соотношение (4.9) приводится к четырем системам из равенств и неравенств:

1) если $\bar{\mathbf{x}}$ – внутренняя точка множества V , то из неравенства (4.9) следует равенство

$$\partial \bar{E}(\bar{\mathbf{x}}) / \partial \mathbf{x} = 0$$

2) если $\bar{\mathbf{x}} \in V$ – внутренняя точка одной из координатных плоскостей, например, $\bar{x}_i = 0$, то из неравенства (4.9) следуют соотношения

$$\partial \bar{E}(\bar{\mathbf{x}}) / \partial x_i \geq 0, \quad \partial \bar{E}(\bar{\mathbf{x}}) / \partial x_j = \partial \bar{E}(\bar{\mathbf{x}}) / \partial x_k = 0, \quad i \neq j \neq k$$

3) если $\bar{\mathbf{x}} \in V$ – внутренняя точка одной из координатных осей, например $\bar{x}_i > 0$, $\bar{x}_j = \bar{x}_k = 0$, то из неравенства (4.9) следуют соотношения

$$\partial \bar{E}(\bar{\mathbf{x}}) / \partial x_i = 0, \quad \partial \bar{E}(\bar{\mathbf{x}}) / \partial x_j \geq 0, \quad \partial \bar{E}(\bar{\mathbf{x}}) / \partial x_k \geq 0, \quad i \neq j \neq k$$

4) если $\bar{\mathbf{x}} = 0$, т. е. точка $\bar{\mathbf{x}}$ совпадает с началом координат, то из неравенства (4.9) следуют неравенства

$$\partial \bar{E}(0) / \partial x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Подставив в приведенные выше системы равенств и неравенств вместо градиента $\partial \bar{E}(\bar{\mathbf{x}}) / \partial \mathbf{x}$ его выражение

$$\partial \bar{E}(\bar{\mathbf{x}}) / \partial x_k = 2\mu \left\{ \alpha (\bar{x}_1 - \varepsilon_1 + \bar{x}_2 - \varepsilon_2 + \bar{x}_3 - \varepsilon_3) + \bar{x}_k - \varepsilon_k \right\}, \quad \alpha = \lambda / 2\mu, \quad k = 1, 2, 3$$

получим решение вариационного неравенства (4.9), а значит, и точку

минимума функции \bar{E} на множестве V :

$$\begin{aligned}
 a) \bar{x}_i &= \varepsilon_i, i = 1, 2, 3, \bar{\varepsilon} \in C_+ \\
 b) \bar{x}_i &= 0, \bar{x}_j = \xi_{ij}, \bar{x}_k = \xi_{ik}, i, j, k = 1, 2, 3, i \neq j \neq k, \bar{\varepsilon} \in C_+^i \\
 c) \bar{x}_i &= \zeta_i, \bar{x}_j = \bar{x}_k = 0, i, j, k = 1, 2, 3, i \neq j \neq k, \bar{\varepsilon} \in C_-^i \\
 d) \bar{x}_i &= 0, i = 1, 2, 3, \bar{\varepsilon} \in C_-
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Здесь $\xi_{ij} = \alpha \varepsilon_i / (1 + 2\alpha) + \varepsilon_j$, $\zeta_i = (\alpha(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \varepsilon_i) / (1 + \alpha)$;

$C_+, C_-, C_+^i, C_-^i, i = 1, 2, 3$, – трехгранные углы в R^3 :

$$\begin{aligned}
 C_+ &= \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \mid \varepsilon_i \geq 0, i = 1, 2, 3\} \\
 C_+^i &= \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \mid \varepsilon_i < 0, \xi_{ij} \geq 0, \xi_{ik} \geq 0, i, j, k = 1, 2, 3, i \neq j \neq k\} \\
 C_-^i &= \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \mid \zeta_i \geq 0, \xi_{kj} < 0, i, j, k = 1, 2, 3, i \neq j \neq k\} \\
 C_- &= \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \mid \zeta_i < 0, i = 1, 2, 3\}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Чтобы дать соотношениям (4.10) наглядную геометрическую интерпретацию, рассмотрим взаимное расположение положительного октанта $x_i > 0, i = 1, 2, 3$, в пространстве переменных x_1, x_2, x_3 и поверхности уровня, определяемой уравнением

$$\bar{E}(x_1, x_2, x_3) = \bar{c} \tag{4.12}$$

Здесь $\bar{c} = \bar{E}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, $\bar{x}_k, k = 1, 2, 3$ – решение задачи об отыскании минимума функции \bar{E} , определенной в (4.1).

Функция \bar{E} принимает наименьшее значение, равное нулю в точке $x_i = \varepsilon_i$. Если все главные компоненты тензора деформаций положительны, эта точка принадлежит конусу K_+ и является решением задачи (4.4). Поэтому справедливо соотношение $a)$ из (4.10).

Поверхность уровня, определяемая уравнением (4.12) – это поверхность сплюснутого эллипсоида вращения, малая ось которого направлена вдоль вектора $(1, 1, 1)$. Центр эллипсоида находится в точке $x_i = \varepsilon_i$, отношение полуосей равно $(1 + 3\alpha)^{-1}$.

Если эллипсоид (4.12) касается одной из координатных плоскостей в положительном квадранте, например, в точке $\bar{x}_i = 0, \bar{x}_j > 0, \bar{x}_k > 0$, то справедливо соотношение $b)$ из (4.10).

Если эллипсоид (4.12) касается одной из координатных положительных полуосей, например, в точке $\bar{x}_i > 0, \bar{x}_j = \bar{x}_k = 0$, то справедливо соотношение $c)$ из (4.10). Этот случай включает в себя

и такую возможность, когда эллипсоид (4.12) касается одной из плоскостей $\bar{x}_j = 0$ или $\bar{x}_k = 0$ в точке, принадлежащей лучу $\bar{x}_i > 0$.

В случае, когда эллипсоид (4.12) пересекается с множеством K_+ только в одной точке $x_i = 0, i = 1, 2, 3$, справедливо соотношение d) из (4.10).

Обозначим через $T_k = T_k(\boldsymbol{\varepsilon})$ главные компоненты тензора $\mathbf{T}(\boldsymbol{\varepsilon})$. Тогда в главной системе координат тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}$ и $\mathbf{T}(\boldsymbol{\varepsilon})$ T_k будут иметь вид

$$T_k(\boldsymbol{\varepsilon}) = \lambda(\varepsilon_1 - \eta_1 + \varepsilon_2 - \eta_2 + \varepsilon_3 - \eta_3) + 2\mu(\varepsilon_k - \eta_k), \quad k = 1, 2, 3 \quad (4.13)$$

Заменяя в соотношении (4.13) η_k на $\bar{x}_k = \bar{x}_k(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$, вычисленные по формулам (4.10), получим формулы для определения функций T_k .

Проверим, что область определения функций $\bar{x}_k = \bar{x}_k(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}), k = 1, 2, 3$, совпадает с R^3 . Из определения угла C_+ следует, что его ребра совпадают с положительными полуосями Ox_1, Ox_2, Ox_3 . Трехгранный угол C_- симметричен относительно оси с направляющим вектором $(1, 1, 1)^T$ и содержит трехгранный угол $C = \{x_1, x_2, x_3 \mid x_i \leq 0, i = 1, 2, 3\}$. Трехгранные углы $C_+^i, i, j, k = 1, 2, 3$, имеют по два общих ребра, совпадающих с двумя ребрами трехгранного угла C_+ , а третье ребро C_+^i совпадает с одним из ребер угла C_- . Аналогично, трехгранные углы $C_-^i, i, j, k = 1, 2, 3$, имеют по два общих ребра, совпадающих с двумя ребрами трехгранного угла C_- , а третье ребро C_-^i совпадает с одним из ребер угла C_+ .

Анализ формул (4.11) показывает, что замыкания углов $C_+, C_-, C_+^i, C_-^i, i, j, k = 1, 2, 3$, могут пересекаться либо по общим граням, либо по общим ребрам, а объединение этих углов совпадает с R^3 . Этот факт свидетельствует о том, что и область определения функций $\bar{x}_k, k = 1, 2, 3$, совпадает с R^3 .

5. Определяющее соотношение модели для изотропного тензора \mathbf{s} .

Системы линейных однородных неравенств в соотношениях (4.10) задают в пространстве переменных $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ восемь множеств, которые представляют собой трехгранные углы с общей вершиной в начале координат. Из единственности решения задачи (4.4) следует, что любые два таких множества либо не имеют общих внутренних точек, либо пересекаются вдоль плоскостей, и тогда их грани, лежащие в этих плоскостях, совпадают.

Покажем, что в каждом таком углу второй тензор напряжений Пиолы-Киркгофа представляется в виде

$$\Sigma = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (5.1)$$

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0, \quad \text{если } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in C_+ \quad (5.2)$$

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mu(3\lambda + 2\mu)\mathbf{E}_1 / (\lambda + \mu), \quad \text{если } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in C_+^i \quad (5.3)$$

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 2\mu \left(\Pi - \frac{1}{1+\alpha}\mathbf{E}_1 + \frac{\alpha}{1+\alpha}\mathbf{E}_2 - \frac{\alpha}{1+\alpha}\mathbf{E}_3 \right), \quad \text{если } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in C_-^i \quad (5.4)$$

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 2\mu(\alpha\mathbf{E}_2 + \Pi), \quad \text{если } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in C_- \quad (5.5)$$

Здесь и далее для упрощения формул полагаем, что

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{D} \otimes \mathbf{D}, \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_3 = \mathbf{I} \otimes \mathbf{D} + \mathbf{D} \otimes \mathbf{I}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{m}_k \otimes \mathbf{m}_k, \quad \beta = 0 \quad (5.6)$$

В соотношениях (5.3), (5.4), (5.6) $i = 1, 2, 3$; $\mathbf{m}_k = \mathbf{m}_k(\boldsymbol{\varepsilon})$ – базисные векторы главной системы координат тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$, а k соответствует номеру i , при котором выполняется одно из нижеприведенных условий:

$$C_+^i \supset (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \quad C_-^i \supset (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \quad i = 1, 2, 3$$

В самом деле, в случае (5.2) согласно a) из (4.10) $\bar{x}_i = \varepsilon_i, i = 1, 2, 3$, а согласно (4.13) главные компоненты T_k равны нулю. Тогда в соотношения (5.1) следует положить

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0 \quad (5.7)$$

В случае (5.5) согласно d) из (4.10) $\bar{x}_i = 0, i = 1, 2, 3$, и поэтому справедлив закон Киркгофа-Сен-Венана

$$\Sigma = 2\mu(\alpha_j(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (5.8)$$

Чтобы получить связь между тензорами Σ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ в остальных двух случаях, найдем представление тензора $\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\eta}$ через тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ в инвариантном виде, воспользовавшись связью между главными компонентами тензоров $\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$, формулами преобразования компонент при переходе от одной системы координат к другой и ортогональностью матрицы преобразования. Рассмотрим более подробно случай (5.4). Тогда согласно c) из (4.10) $\bar{x}_i > 0, \bar{x}_j = \bar{x}_k = 0$. Для упрощения выкладок рассмотрим случай, когда $i = 1$. Учтем равенство c) в (4.10) и получим представление тензора $\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\eta}$ из следующих преобразований:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\eta})_{ij} &= \sum_{s=1}^3 c_i^s c_j^s (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\eta})_s = \sum_{s=1}^3 c_i^s c_j^s \varepsilon_s - \frac{1}{1+\alpha} c_i^1 c_j^1 \varepsilon_1 - \frac{\alpha}{1+\alpha} c_i^1 c_j^1 J(\boldsymbol{\varepsilon}) = \\ &= \varepsilon_{ij} - \left(b_1^i b_1^j b_1^k b_1^l + \alpha b_1^i b_1^j \delta_{kl} \right) \varepsilon_{kl} / (1+\alpha) \end{aligned}$$

Здесь b_j^i – элементы матрицы, обратной к матрице (c_j^i) , столбцы матрицы (b_j^i) – координаты базисных векторов $\mathbf{m}_k, k=1,2,3$. Так как произведения $b_1^i b_1^j$ – компоненты тензора \mathbf{D} в исходной системе координат, последнее соотношение можно переписать в инвариантном виде

$$\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\eta} = \left(\Pi - \frac{1}{1+\alpha} \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} - \frac{\alpha}{1+\alpha} \mathbf{D} \otimes \mathbf{I} \right) \boldsymbol{\varepsilon}$$

Первый инвариант тензора $\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\eta}$ тогда представляется следующим образом:

$$j_1(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\eta}) = (j_1(\boldsymbol{\varepsilon}) - \varepsilon_1) / (1 + \alpha)$$

Из последних двух соотношений следует соотношение (5.4).

Чтобы получить формулы при $i=2,3$, нужно в формулах выше заменить нижний индекс, равный 1, на 2 и 3, соответственно.

В случае (5.3) можно прийти к инвариантному представлению тензоров $\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\Sigma}$ с помощью аналогичных преобразований

$$\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\eta} = \left((1+\nu) \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} - \frac{\alpha}{1+2\alpha} \mathbf{I} \otimes \mathbf{D} \right) \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \nu = \lambda / (2(\lambda + \mu)) \quad (5.9)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = 2\mu(1+\nu)(\mathbf{D} \otimes \mathbf{D})\boldsymbol{\varepsilon}, \quad j_i(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\eta}) = \varepsilon_i \varepsilon_i / (1+2\alpha), \quad i=1,2,3$$

В итоге из формул (5.7)–(5.9) и (5.1) следуют представления (5.2)–(5.5) тензора \mathbf{A} во всех четырех случаях.

На основании соотношений (5.2)–(5.5) можно построить алгоритм вычисления функции реакции (5.1). Условно алгоритм можно разложить на три шага.

1. Решить задачу на собственные значения для матрицы компонент тензора деформаций: найти главные компоненты тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$ и соответствующие им базисные векторы.

2. Путем перебора установить, какому из трехгранных углов, о которых говорилось выше, принадлежат главные компоненты $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Как только такой угол определен, будет известно, по какой из формул (5.2)–(5.5) вычисляется тензор $\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon})$.

3. По формуле, определенной на шаге 2, найти значения компонент тензора $\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon})$, а затем вычислить компоненты тензора $\boldsymbol{\Sigma}$ по формуле

$$\Sigma_{ij} = A_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

Чтобы оценить достоинства такого алгоритма, нужно учесть, что в общем случае анизотропной среды тензор $\boldsymbol{\eta}$ определяется из решения вариационного неравенства относительно шести неизвестных

$\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{33}, \Sigma_{12}, \Sigma_{23}, \Sigma_{31}$ на множестве, которое задается системой из семи нелинейных неравенств.

Рассмотрим случай плоского деформированного состояния, т. е. справедливы условия $\varepsilon_3 = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0$. Можно показать, что при этих условиях тензор $\boldsymbol{\eta}$ может иметь только две отличные от нуля главные компоненты $\eta_k = \bar{x}_k(\boldsymbol{\varepsilon}), k=1, 2, \eta_3 = 0$, причем $\bar{x}_1 \geq 0, \bar{x}_2 \geq 0$. Функции $\bar{x}_k = \bar{x}_k(\boldsymbol{\varepsilon})$ определяются тогда по формулам

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= \varepsilon_i, \text{ если } \varepsilon_i \geq 0, i=1, 2 \\ \bar{x}_i &= \tilde{\zeta}_i, \bar{x}_j = 0, \text{ если } \varepsilon_j \leq 0, \tilde{\zeta}_i > 0, i, j=1, 2, i \neq j; \\ \tilde{\zeta}_i &= (\alpha(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_i) / (1 + \alpha), \bar{x}_i = 0, \text{ если } \tilde{\zeta}_i \leq 0, i=1, 2, 3 \end{aligned}$$

Из этих формул следуют также выражения для главных компонент тензора $\boldsymbol{\eta}$ в случае одноосного деформированного состояния. Тогда справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= 0, \text{ если } \varepsilon_i < 0, i=1, 2, 3 \\ \bar{x}_1 &= \varepsilon_1, \bar{x}_2 = \bar{x}_3 = 0, \text{ если } \varepsilon_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Чтобы получить связь между тензорами деформаций и напряжений в инвариантном виде, введем в рассмотрение следующие углы на плоскости переменных $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{\varepsilon_i \geq 0, i=1, 2\}, & \Omega_2 &= \{\varepsilon_1 \leq 0, \tilde{\zeta}_2 \geq 0\}, \\ \Omega_3 &= \{\tilde{\zeta}_2 \leq 0, \tilde{\zeta}_1 \leq 0\}, & \Omega_4 &= \{\varepsilon_2 \leq 0, \tilde{\zeta}_1 \geq 0\} \end{aligned}$$

В угле Ω_1 справедливы равенства $\bar{x}_i = \varepsilon_i, i=1, 2, 3$, поэтому тензор напряжений равен нулю. В угле Ω_3 справедливы равенства $\bar{x}_i = 0, i=1, 2, 3$, поэтому здесь справедлив закон Кирхгофа – Сен – Венана (5.8).

Воспользовавшись рассуждениями, которые позволили установить соотношения (5.2)–(5.5), придем к инвариантному представлению тензора напряжений в виде линейной функции от тензора деформаций в каждом из углов Ω_2 и Ω_4

$$\boldsymbol{\Sigma} = 2\mu \left(\mathbf{I} - \frac{1}{1+\alpha} \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} + \frac{\alpha}{1+\alpha} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \frac{\alpha}{1+\alpha} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{D} + \mathbf{D} \otimes \mathbf{I}) \right) \boldsymbol{\varepsilon},$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2, \text{ если } \boldsymbol{\varepsilon} \in \Omega_2; \quad \mathbf{D} = \mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1, \text{ если } \boldsymbol{\varepsilon} \in \Omega_4$$

В работе построена нелинейная зависимость между вторым тензором Пиолы – Кирхгофа и тензором Грина – Сен – Венана, представляющая собой функцию реакции упругих сред, нормальные компоненты вектора напряжений которых ограничены.

Литература

1. Свод правил. Каменные и армокаменные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-22-81. СП 15.13330.2012. Masonry and reinforced masonry structures. Минрегиона России, 2012. 86 с.
2. Huerta S. Mechanics of masonry vaults: The equilibrium approach // Historical Constructions, P.V. Lourenço, P. Roca (Eds.), Guimarães. 2001. P. 47–90.
3. Hencky H. Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen. ZAMM 4, 1924. S. 323–335.
4. Del Piero G. Constitutive equation and compatibility of the external loads for linear elastic masonry-like materials. Meccanica, 24. 1989. P. 150–162.
5. Bauschke H. H., Combettes P. L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. Springer. 2010. XVI + 468 p.
6. Lancaster P. The Theory of Matrices. Academic Press, 1969. 316 p. = Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1973. 280 с.
7. Romano G., Sacco E. Materiali non resistenti a trazione. Equazioni costitutive e metodi di calcolo. Atti Istituto di Scienza delle Costruzioni, Facolta di Ingegneria di Napoli. N350. 1984.
8. Panzeca T., Polizzotto C. Constitutive equations for no-tension materials. Meccanica. 1988. Vol. 23. P. 88–93.
9. Lucchesi M., Padovani C., Pasquinelli G., Zani N. Masonry Constructions: Mechanical Models and Numerical Applications. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, vol. 39. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. 2008. 168 p.
10. Cottle R. W., Jong-Shi P., Stone R. E. The linear complementarity problem. Boston. Academic Press, 2009. XXVII+761 p.
11. Ciarlet Ph. G. Mathematical elasticity. Vol. I. Three-dimensional elasticity. North-Holland et cetera. 1988. 492 p. = Сьярле Ф. Математическая теория упругости. М.: Мир. 1992. 472 с.
12. Coleman R.D., Noll W. Material symmetry and thermodynamic inequality in finite elastic deformations. Archives for Rational mechanics and analysis. 1964. Vol. 15. N. 2. P. 87–111.
13. Noll W. A mathematical theory of mechanical behavior of continuous media. Archives for Rational mechanics and analysis. 1959. Vol. 2. N. 1. P. 197–226.
14. Ekeland I., Temam R. Convex Analysis and Variational Problems. North Holland; Amsterdam: Oxford: Elsevier. 1976. 411 p. = Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.

15. Holmes R. B. A Course on Optimization and Best Approximation. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-NewYork. 1972. 240 p.
16. Glushko A. I., Neshcheretov I.I. Mathematical models of damaged elastic media that deform differently under tension and compression. Quarterly J. of Mechanics & App. Maths. 2012. Vol. 65. N. 3. P. 373–387.
17. Baiocchi C., Capelo A. Variational and quasi-variational inequalities. Applications to free boundary problems. Wiley. 1984. 462 p. = Байокки К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей. М.: Наука, 1988. 448 с.
18. Лохин В. В., Седов Л. И. Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов // Седов Л. И. Механика сплошной среды. М.: Наука. Т. 1. 1970. С. 436–464.
19. Gurtin M. E. An Introduction to Continuum Mechanics. Academic press. New York-London-Toronto-Sydney-San Francisco. 1981. 272 p.

Комментарии

1. Статья «О построении моделей упругих сред, нормальные компоненты вектора напряжений которых ограничены» опубликована в журнале «Известия Российской академии наук. Механика твердого тела», 2018, № 6. С. 129–144; поступила в редакцию 10.11.2014. Авторы – А. И. Глушко, И. И. Нецшеретов.

2. Для сред, которые здесь называются средами с ограниченными нормальными напряжениями, в иностранной литературе приняты термины «no-tension materials» и «masonry-like materials». Определяющие соотношения для таких сред могли бы быть получены авторами работ [4, 7–9], если бы они следовали подходу Moreau J. J. Sur le lois de frootterment, de plasticité et de viscosité // C. r. Acad. sci. Ser. A et B. 1970. Т. 217. № 13. P. A608–A611. Для этого нужно задать потенциал Гиббса $\psi(\boldsymbol{\sigma})$, где ψ – выпуклая функция, совпадающая с квадратичной формой, если тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ принадлежит выпуклому замкнутому конусу всех неположительных тензоров второго ранга, и равная бесконечности в противном случае. Тогда, опираясь на теорию двойственности, а именно, используя переход от функции ψ к ее преобразованию Лежандра, получим выражение для свободной энергии $F = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon})$, в точности совпадающее с аналогичным выражением, полученным итальянскими авторами на основе предположений теории упругопластического тела. Для того чтобы следовать какому-то подходу, необходимо его знать, но для некоторых авторов проще изобрести «оригинальный» велосипед, чем изучить состояние дел по конкретному вопросу.

3. Результаты работы обсуждались с академиком В. Ф. Журавлевым, который считал, что работа является современным нетривиальным развитием механики твердого деформируемого тела с внутренними степенями свободы. Благодаря его поддержке удалось преодолеть преграды, возникшие на пути к опубликованию.

Послесловие

*Основная идея всегда должна быть недостижимо выше,
чем возможность ее исполнения.*

Федор Достоевский

Авторов книги с давних пор интересовали две проблемы:

- создание эффективных алгоритмов решения задач механики твердого деформируемого тела (в частности, описывающих неупругое деформирование материала) гарантированной точности;
- изучение процессов неупругого поведения материала на основе кинетики повреждений.

Этими соображениями продиктован отбор статей, помещенных в книгу. Что касается первой проблемы, то в восьмидесятые-девяностые года двадцатого века в научных институтах, где работали авторы, сравнивались результаты расчетов модельных задач, выполненных по различным алгоритмам. В рамках этого сравнения результаты расчетов, использующих описанные в главах 1, 3 и 4 алгоритмы, были признаны эталонными.

С другой стороны, в книгу включены статьи, в которых разрушение материала рассматривается как кинетический процесс накопления повреждений. По нашему мнению, такой подход к проблеме разрушения является альтернативой существующим инженерным подходам к расчету конструкций, поясним это на примере образования разрывов сплошности.

Материалы любой конструкции, подвернутой какому-либо внешнему воздействию (механическому, тепловому или радиационному), изменяют свои свойства. Происходит как рост микродефектов (в том числе микротрещин и микропор), первоначально имеющих в материале и возникших при изготовлении элемента конструкции, так и зарождение новых микродефектов. Оба этих процесса сопровождаются объединением («сливанием») микродефектов в мезодефекты (в частности, в мезотрещины). Далее, мезотрещины могут увеличиваться в размерах, причем, как показывают опытные данные, рост таких мезотрещин происходит за счет образования перед ними микротрещин, которые сливаясь друг с другом, обеспечивают рост мезотрещины. Другими словами, мезотрещина растет не потому, что ее вершина «прорезает» новый неповрежденный материал, а за счет объединения с вновь накопившимися в ее окрестности микротрещинами.

Таким образом, до момента образования макротрещины (разрыва сплошности) в материале будут протекать сложные и, вообще говоря, разные процессы. Длительности этих процессов в настоящее время мало

изучены, но есть основания полагать, что они характеризуются существенно разными интервалами времени.

В инженерной науке при рассмотрении процесса изменения свойств материала традиционно ограничиваются рассмотрением образования разрыва сплошности, помещая для этого в зоны с наибольшей интенсивностью напряжений постулированный дефект. При этом процессы накопления повреждений рассматриваются в упрощенной постановке и практически не влияют как на изменение свойств материала, так и на изменение напряженно-деформированного состояния элемента конструкции.

На наш взгляд, такой подход не позволяет давать достоверные оценки ресурса ответственных конструкций, эксплуатирующихся десятки лет, и тем самым не позволяет оценить безопасность эксплуатации изделия в целом.

При изложении материала мы стремились следовать стилю монографий и статей:

Бабенко К. И. Основы численного анализа. – М.: Наука, 1986.

Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. – М.: Наука, 1973.

Халмош П. Р. Как писать математические тексты. – УМН, 26:5 (161) (1971), 243–269.

Халмош П. Р. Конечномерные векторные пространства. – М.: ГИФМЛ, 1963.

Сьярле Ф. Математическая теория упругости. – М.: Мир, 1992.

Noll W. A mathematical theory of mechanical behavior of continuous media. Archives for Rational mechanics and analysis. 1959. Vol. 2. N. 1. P. 197–226.

Truesdell C., Noll W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. 2003.

Насколько это удалось – судить читателю.

Feci quod potui, faciant meliora potentes.

Сведения об авторах

Анатолий Иванович Глушко

Родился в 1948 г. После окончания МФТИ с 1972 г. работал в ЦАГИ им. Жуковского. Сотрудник Института проблем механики АН СССР с 1977 по 2015 гг.

Кандидат физико-математических наук – 1980 г.

Научные интересы – модели поведения деформируемых сред, задачи о распространении нестационарных волн в деформируемых средах.

Илья Иванович Нещеретов

Родился в 1946 г. После окончания в 1970 г. МВТУ им. Баумана работал в конструкторском бюро и научно-исследовательском институте. С 1992 г. начальник лаборатории ФБУ «НТЦ ЯРБ» Ростехнадзора.

Кандидат технических наук – 1982 г.

Научные интересы – модели поведения неупругих сред, алгоритмы решения задач о распространении нестационарных волн в деформируемых средах, применение методов математической статистики к задачам стиховедения.

ТРУДЫ НТЦ ЯРБ

Анатолий Иванович Глушко,
Илья Иванович Нещеретов

**Модели и задачи механики
деформируемых сред**

Ответственный за выпуск Н. Р. Большакова
Редактор Т. А. Красотина
Оригинал-макет подготовлен в ФБУ «НТЦ ЯРБ»
Подписано в печать 09.08.22
Тираж 50 экз.

ISBN 978-5-907011-42-7



9 785907 011427